N° D'ORDRE :
42.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

M. Voislav MICHKOVITCH,

Licencié ès Sciences, Aide Astronome à l'Observatoire de Nice.

1re THÈSE. — ÉTUDES DE STATISTIQUE STELLAIRE.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 12 Juillet 1924, devant la Commission d'Examen.

MM. HUMBERT, *Président.*
CABANNES, SOULA, *Examinateurs.*

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1924

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41535710_0034

N° D'ORDRE :
42.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

M. Voislav MICHKOVITCH,

Licencié ès Sciences, Aide Astronome à l'Observatoire de Nice.

1re **THÈSE.** — ÉTUDES DE STATISTIQUE STELLAIRE.

2e **THÈSE.** — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 12 Juillet 1924, devant la Commission d'Examen.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

MM. HUMBERT, *Président.*
CABANNES, } *Examinateurs.*
SOULA, }

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1924

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

MM.

Doyen	GODECHOT, Professeur de Chimie.	
Doyen honoraire	DAUTHEVILLE.	
Professeurs honoraires	FABRY, DUBOSCQ.	
Professeurs	FLAHAULT	Botanique.
	de FORCRAND	Chimie.
	CURIE	Minéralogie.
	BEAULARD de LENAIZAN	Physique.
	BLAYAC	Géologie.
	TURRIÈRE	Mécanique rationnelle.
	HUMBERT	Mathématiques pures.
	BATAILLON	Zoologie et Anatomie comparée.
	SOULIER	Zoologie.
	PAVILLARD	Cryptogamie et Cytologie végétale.
	GAY	Chimie.
	CABANNES	Physique.
Maîtres de Conférences.	SOULA	Mathématiques.
	BEGHIN	—
	CARRIÈRE	Chimie.
Secrétaire	DUBOIS.	

73399 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS ET Cie, quai des Grands-Augustins, 55.

A MON PÈRE

A

MONSIEUR P. HUMBERT,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MONTPELLIER,

PREMIÈRE THÈSE

ÉTUDES
DE
STATISTIQUE STELLAIRE

AVANT-PROPOS.

La distribution des astres dans l'espace, leurs distances et déplacements héliocentriques, ainsi que leurs particularités physiques (éclat, couleur, spectre, densité, masse, dimensions, température) constituent le champ d'investigation de l'astronomie stellaire. Cette branche, encore nouvelle, mais qui s'est déjà montrée si féconde en résultats, se propose de rechercher les lois qui régissent ces divers éléments et les relations qui peuvent les unir, afin de parvenir à une théorie générale concernant la structure et l'évolution de l'univers stellaire.

Pour la réalisation d'un programme aussi vaste, on s'est adressé tout naturellement à la méthode qui avait déjà fait ses preuves pour la résolution des nombreux problèmes intéressant notre système stellaire : réunion d'un grand nombre de données d'observations aussi variées et précises que possible, puis discussion de l'ensemble à l'aide de méthodes mathématiques.

De nombreux observateurs, particulièrement en Amérique et en Angleterre, pourvus d'instruments puissants et perfectionnés, consacrent leur activité à recueillir des renseignements circonstanciés sur les phénomènes les plus variés des espaces stellaires. Le maté-

riel déjà accumulé, loin d'être complet, a suffi pour démontrer sans aucun doute l'inefficacité, en présence de tels problèmes, des théories et procédés mathématiques employés jusqu'à présent.

La fameuse méthode des moindres carrés que « les expérimentateurs s'imaginent être un théorème de mathématiques et les mathématiciens être un fait expérimental », s'est montrée nettement inopérante. Il a fallu imaginer des méthodes nouvelles, plus rigoureuses, relevant de la *statistique mathématique*. Créée par Bernoulli, Laplace et Lexis, perfectionnnée ensuite par Pearson, celle-ci fut appliquée à l'astronomie par M. Charlier, professeur à l'Université de Lund. Les travaux dus au savant suédois et à ses élèves constituent incontestablement un ensemble tout à fait remarquable de recherches importantes et variées intéressant à la fois la théorie et les applications numériques.

Le présent travail a pour but : 1° de donner une idée générale des méthodes statistiques employées et des résultats obtenus par M. Charlier et ses collaborateurs, et 2° d'en fournir un exposé suffisamment détaillé permettant aux jeunes astronomes désireux d'effectuer une application des dites méthodes, de la mener à bien sans être contraints de consulter les nombreux mémoires originaux disséminés dans les « Meddelande från Lunds Astronomiska Observatorium.

Nous tenons cependant à signaler que le développement déjà avancé de ces théories, ainsi que les nombreuses applications faites pendant ces dernières années, rendaient *a priori* difficile l'achèvement de ce programme, étant donné l'espace limité dont nous disposions pour ce travail.

Dans une première partie sont résumés les recherches et les résultats théoriques; on y expose la marche suivie par l'astronome suédois et l'on s'efforce de montrer comment il est parvenu à établir que l'expression mathématique de la loi des erreurs de Gauss n'est en réalité que le terme d'une série traduisant une loi beaucoup plus générale, comportant celle de Gauss comme cas particulier.

L'application de ces méthodes aux nombreux problèmes intéressant l'astronomie stellaire, ainsi qu'un exposé succinct des résultats acquis, forme la seconde partie.

La dernière partie est consacrée à une recherche statistique personnelle concernant les variables du type Algol.

On a jugé intéressant de réunir, à la fin du travail, dans un index bibliographique, aussi complet que possible, les mèmoires parus jusqu'à ce jour se rattachant au domaine de la statistique stellaire.

A M. P. Humbert, professeur à la Faculté des Sciences de Montpellier, pour tous les renseignements et les conseils qu'il m'a prodigués au cours de ce travail, et à M. G. Fayet, directeur de l'Observatoire de Nice, pour sa bienveillante aide dans la rédaction, je me permet d'exprimer ici ma profonde reconnaissance.

INTRODUCTION.

L'étude d'une série d'observations, à l'aide des procédés de la statistique mathématique, consiste soit à fixer l'expression analytique susceptible de représenter le mieux possible l'allure et les propriétés générales du phénomène observé, soit à établir les relations qui peuvent unir des phénomènes simultanés, ou certaines particularités d'un même phénomène. Le premier travail repose sur la théorie des erreurs d'observations, tandis que les recherches de la seconde catégories relèvent de la théorie *des corrélations*.

Théorie des erreurs. — Discuter un ensemble d'observations revient principalement à évaluer la grandeur probable de l'erreur commise sur chaque observation, de façon à en conclure la valeur la plus vraisemblable de la quantité mesurée. Un tel calcul serait naturellement impossible si l'on n'admettait, *a priori*, une loi de probabilités des erreurs. La modification ensentielle introduite dans ce domaine par M. Charlier réside précisément dans la définition, énoncée pour la première fois par Hagen (1), qu'il adopte pour l'erreur accidentelle.

Il admet que : L'erreur accidentelle est la somme algébrique d'un nombre indéterminé d'erreurs *élémentaires*, toutes égales en valeur absolue, mais de signes quelconques, provenant d'un *grand nombre* de causes inconnues, dont chacunes est caractérisée par une loi particulière.

En réalité l'erreur accidentelle, ainsi que la véritable loi qui la régit, nous sont inconnues. La définition précédente, base de toute la statistique mathématique, ne constitue qu'une hypothèse, dont la légitimité pourra s'estimer *à posteriori*, par l'accord plus ou moins grand que présente, avec les faits observés, le résultat qu'elle fournira.

(1) G. Hagen, *Grundzuge der Wahrscheinlichkeitsrechnug*, 1837.

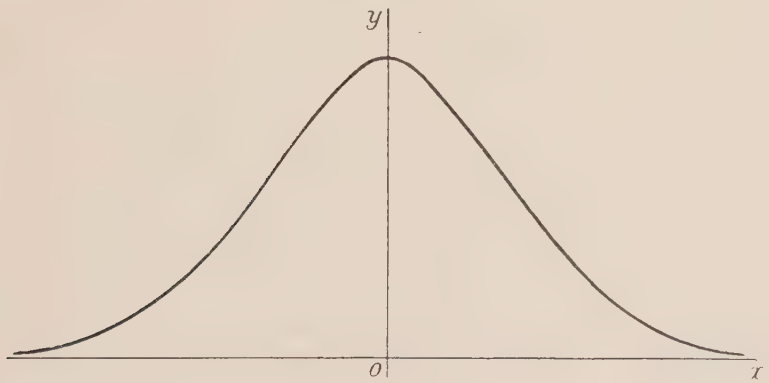
Une fois cette hypothèse admise, l'expression mathématique de la loi des erreurs peut s'obtenir à l'aide de raisonnements analytiques connus.

Courbe de fréquence. — Toute série d'observations fournit une courbe, dite de probabilité ou de fréquence, représentant la répartition des mesures effectuées. Pour la construire, en coordonnées cartésiennes rectangulaires, on porte, en abscisse, les divers résultats mesurés, et en ordonnées, le nombre de mesures se rapportant à chacun de ces résultats. Si l'on parvient à représenter par $y = f(x)$ la courbe obtenue en joignant les extrémités successives de toutes les ordonnées, la fonction $f(x)$ s'appelle fonction de fréquence du phénomène observé.

La figure 1 montre la courbe bien connue de la répartition des erreurs d'observations suivant la loi de Gauss, et dont l'équation est

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}.$$

Fig. 1.



Elle est continue, asymptotique à l'axe des x, et symétrique par rapport à l'axe des y. Ses propriétés, de même que le rapport existant entre celles-ci et la répartition des erreurs, sont suffisamment connus, et il est inutile d'insister sur ce sujet.

Jusqu'à la fin du siècle dernier, cette courbe fut considérée comme la seule représentation exacte de la fréquence des erreurs

de toutes les observations en général. Pourvu que les observations fussent assez nombreuses, s'imaginait Gauss, elles ne pouvaient pas ne pas obéir à cette loi. Or depuis une trentaine d'années, on sait qu'il n'en est pas ainsi. Les recherches faites dans le domaine des sciences naturelles ont révélé, et d'une manière indiscutable, l'existence de séries d'observations n'obéissant pas à la loi de Gauss, de telle sorte que la discussion par cette loi conduisait à des résultats en désaccord avec les phénomènes observés. La « courbe en cloche » (*fig.* 1) n'est donc vraisemblablement qu'un des membres de la famille des courbes de fréquences, de même que la loi qu'elle représente n'est qu'un cas particulier d'une expression plus générale de la loi des erreurs.

Dans les figures 2 et 3 on donne, à titre d'exemples, quelques

Fig. 2.

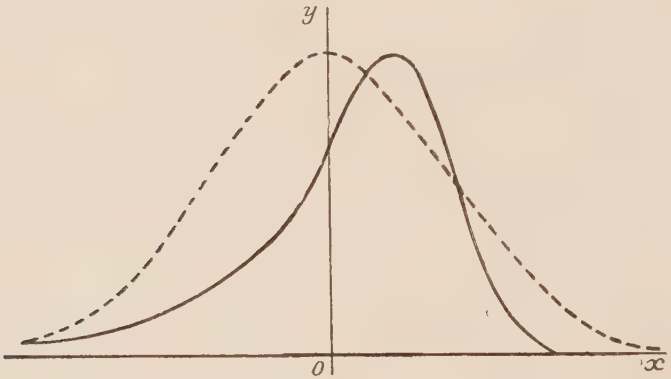
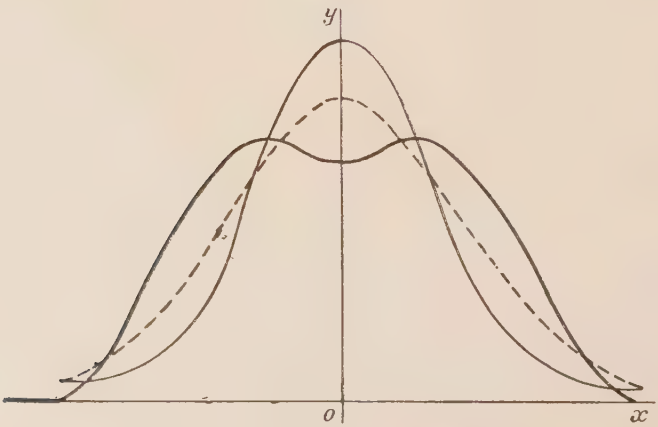


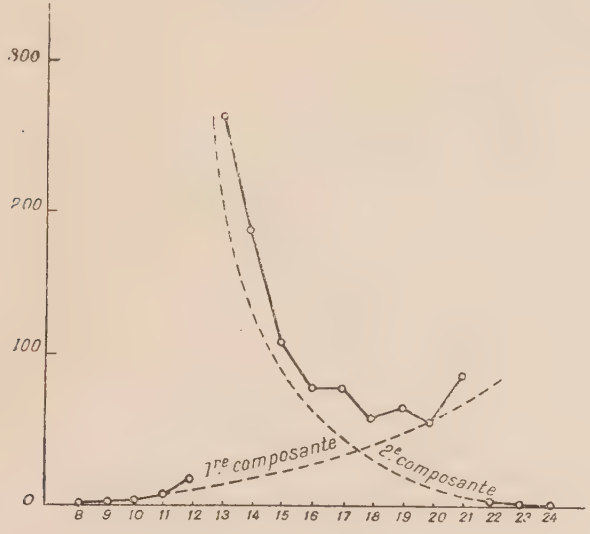
Fig. 3.



courbes de fréquence dont on se servira dans la suite et que l'on pourra comparer à celle de la figure 1 (tracé en pointillé).

Toutes ces courbes peuvent être appelées simples; nous verrons en effet qu'il existe aussi des courbes de fréquence engendrées par la combinaison de deux ou plusieurs courbes simples en une seule. (*fig.* 4) (1)

Fig. 4.



L'étude d'une telle série d'observations conduit au problème de la dissection d'une courbe de fréquence en ses composantes. Le premier qui s'en est occupé était K. Pearson. La solution du problème général de la dissection d'une courbe de fréquence, telle qu'elle a été envisagée par ce mathématicien, se ramène à une équation du neuvième degré, ce qui rend son application impraticable. En admettant certaines hypothèses sur les propriétés des courbes composantes, le problème peut être simplifié (Pearson, Charlier), mais les calculs restent néanmoins considérables, de sorte que nous ne pouvons pas songer à nous arrêter plus longtemps sur ces problèmes.

---

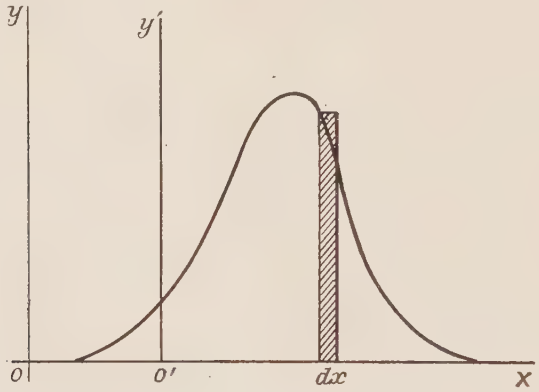
(1) Charlier, *Researches in to the theory of Probability*, *Medd.* Ser. II, n° 4.

Moment. — La notion de moment a été introduite dans la théorie statistique par K. Pearson, et joue un role très important dans l'étude des courbes de fréquence. On appelle moment d'ordre n, par rapport à un axe OY, la somme des produits de toutes les aires élémentaires par la $n^{\text{iéme}}$ puissance de leur distance respective à cet axe. Ainsi dans la figure 5, l'aire élémentaire (la partie couverte de hachures) étant $f(x)dx$, sa distance à l'axe OYx, le moment d'ordre n par rapport à cet axe est défini par

$$\mu'_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)\, dx.$$

Connaissant les n premiers moments μ'_n d'une courbe de fréquence, par rapport à un axe OY, pour calculer les moments μ_n,

Fig. 5.



par rapport à un autre axe O'Y', parallèle à OY et situé à une distance OO' $= b$ de celui-ci, on a

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-b)^n f(x)\, dx,$$

ou bien

$$\mu_n = \mu'_n - C_n^1 b\, \mu'_{n-1} + C_n^2 b^2 \mu'_{n-2} - + \ldots$$
$$+ (-1)^{n-1} C_n^{n-1} b^{n-1} \mu'_1 + (-1)^n C_n^n b^n \mu'_0.$$

Coefficient de corrélation. — Deux phénomènes simultanés, sans relation apparente, peuvent quelquefois être liés entre eux.

L'étude de séries d'observations au point de vue de leur rapports mutuels, n'est pas un problème nouveau. Sa solution par les méthodes graphiques, tout en n'étant ni générale ni assez précise, pouvait néanmoins, dans beaucoup de cas, rendre des services comme une première approximation. La vraie solution de ce problème, si important dans la statistique, a été donnée dans la théorie des corrélations.

Au point de vue de la théorie des erreurs, deux phénomènes seront en corrélation si les erreurs élémentaires respectives sont les mêmes, soit en totalité, soit en partie seulement. Le degré de parenté entre deux séries d'observations est mesuré par le coefficient de corrélation. Cette quantité, que l'on désignera par r, est, en valeur absolue, inférieure ou au plus égale à l'unité.

Suivant que ce coefficient est positif ou négatif, la croissance dans les deux séries considérées sera du même sens, ou de sens contraire. Si les deux séries d'observations n'ont rien de commun, r sera égal à zéro. Par contre, $r = 1$ implique une correspondance linéaire entre les observations des deux phénomènes, de sorte qu'un élément quelconque de l'une des séries détermine entièrement l'élément correspondant de l'autre. D'une manière générale, plus la quantité r est voisine de l'unité, plus la corrélation entre les phénomènes est grande, et inversement.

Dans la suite de ce travail nous verrons que la connaissance du coefficient de corrélation peut servir à résoudre d'autres problèmes importants qui se présentent dans l'étude statistique.

Statistiques homogrades et hétérogrades. — Suivant la nature des éléments dont se composent les données d'observations et la manière de les traiter, Charlier a divisé la statistique mathématique en deux parties.

Dans la première, qu'il dénomme la statistique homograde, l'ensemble de données comporte deux groupes, suivant que les individus, ou objets, *possèdent ou non* une certaine propriété, sans aucun égard à l'intensité de celle-ci. Ce dénombrement fait, le problème qui se présente au calculateur consite à fixer si les séries ainsi formées suivent ou non les lois statistiques et, dans la négative, à rechercher l'influence qu'exercent les causes étrangères sur les individus des deux groupes. Dans ce domaine rentrent les statis-

tiques des nombres de naissances, suicides, décès,mariages, des nombres de jours pluvieux de l'année, etc. On peut remarquer que les éléments des séries homogrades sont de nombres abstraits. Pour résoudre les divers problèmes qui se rattachent à cette partie, les théorèmes élémentaires du calcul des probabilités, en particulier ceux de Bernoulli, Poisson et Lexis, suffisent.

Dans la statistique hétérograde, on tient compte non seulement d'une propriété, mais en même temps de l'intensité ou degré auquel chaque individu possède cette propriété. L'étude des données de cette catégorie devient par conséquent beaucoup plus compliquée que dans le cas précédent. Pour aboutir à des résultats utiles, il a fallu, à la place de quelques théorèmes élémentaires du calcul des probabilités, créer une théorie nouvelle, basée d'une part sur quelques hypothèses et, d'autre part, sur les procédés et théorèmes connus de l'analyse mathématique. Et c'est précisément le développement de cette seconde partie des méthodes statistiques, dont nous nous proposons ici de donner un exposé, qui constitue l'œuvre importante de l'école de Charlier.

PREMIÈRE PARTIE.

Toute la théorie de la statistique mathématique est basée sur les deux formes A et B que peut prendre la fonction de fréquence. Si variés et compliqués que soient les phénomènes observés, pourvu que la série d'observations soit assez étendue, l'une ou l'autre de ces deux expressions suffira pour représenter mathématiquement l'allure générale et les propriétés caractéristiques de chaque phénomène. Toute autre courbe de fréquence n'est que la résultante d'une superposition de courbes de ces deux catégories.

Fonction de fréquence du type A. — Soit $f(x)\,dx$ la probabilité pour que l'erreur x soit comprise entre les limites x et $x + dx$. Sur la fonction $f(x)$ nous n'avons aucune donnée, sinon que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Nous allons admettre, en plus, que

$$\lim_{x>N} f(x) = 0$$

N étant un nombre, suffisamment grand, positif ou négatif; en d'autres termes, nous supposons que la probabilité d'une erreur x sera d'autant plus voisine de zéro que x est plus grand. Cela posé, reportons-nous à la définition de l'erreur accidentelle.

Les causes en très grand nombre, mises en jeu lors d'une observation, engendrent, chacune suivant une loi particulière, une erreur élémentaire, quantité très petite qui peut être positive ou négative. La somme algébrique de toutes ces erreurs élémentaires est appelée « erreur accidentelle ». Soient maintenant ε une quantité très petite, et m un nombre entier, positif. D'après ce qui a été dit plus haut, la probabilité relative pour qu'une erreur élé-

mentaire x_k, provenant d'une cause C_k, soit comprise entre les limites $m\varepsilon$ et $m\varepsilon + \varepsilon$, sera $\varepsilon f_k(m\varepsilon)$.

Or, si l'on considère la somme

$$\begin{aligned} X_k(\omega) &= \varepsilon[f_k(0) + f_k(\varepsilon)\, e^{\varepsilon\omega i} + f_k(2\varepsilon)\, e^{2\varepsilon\omega i} + \dots \\ &\qquad + f_k(-\varepsilon)\, e^{-\varepsilon\omega i} + f_k(-2\varepsilon)\, e^{-2\varepsilon\omega i} + \dots] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \varepsilon f_k(m\varepsilon)\, e^{m\varepsilon\omega i} \qquad (k = 1, 2, 3, \dots, n) \end{aligned}$$

on s'apercevra que le coefficient du terme en $e^{m\varepsilon\omega i}$ est précisément la probabilité $\varepsilon f_k(m\varepsilon)$ de l'erreur élémentaire x_k, relative à la cause C_k. Il en sera de même pour toutes les erreurs élémentaires $x_1, x_2, \dots, x_n$ relatives aux causes $C_1, C_2, \dots, C_n$. Et si l'on forme le produit

$$X_1(\omega)\, X_2(\omega) \dots X_n(\omega) = \Pi(\omega)$$

des n séries, le coefficient du terme en $e^{m\varepsilon\omega i}$ sera, d'après le théorème des probabilités composées, la probabilité pour que la somme des n erreurs élémentaires, provenant de n causes différentes, soit égale à $m\varepsilon$, c'est-à-dire la probabilité cherchée de l'erreur accidentelle.

Pour obtenir l'expression de ce coefficient on peut se servir du théorème suivant de la théorie des fonctions, lorsque

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + \dots$$

on a

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{\varphi(t)}{t^{n+1}}\, dt,$$

l'intégrale étant prise le long d'un contour (C) contenant l'origine dans son intérieur. En prenant pour (C) un cercle de rayon égal à l'unité, c'est-à-dire en posant $t = e^{\theta i}$, on a

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(e^{\theta i})\, e^{-n\theta i}\, d\theta.$$

En appliquant ce théorème à la série $\Pi(\omega)$, on obtient pour le coefficient du terme général, que l'on désignera par $A_{m\varepsilon}$,

$$A_{m\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \Pi(\omega)\, e^{-m\varepsilon\omega i}\, d\omega.$$

Enfin, si, en passant aux limites, on remplace la quantité ε par

une différentielle, le problème de la loi des erreurs se résume dans

$$X_k(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x)\, e^{x\omega i}\, dx$$

et

$$A_z = \frac{dz}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X_1(\omega)\, X_2(\omega) \ldots X_n(\omega)\, e^{-z\omega i}\, d\omega = \frac{dz}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \Pi(\omega)\, e^{-z\omega i}\, d\omega,$$

A_z étant la probabilité pour que la somme des n erreurs élémentaires soit comprise entre les limites z et $z + dz$.

Laissant de côté comme inutile dans la recherche actuelle la discussion analytique des divers cas qui peuvent se présenter dans l'étude de l'intégrale $X_k(\omega)$, on va établir l'expression de la loi des erreurs du type A en partant de l'hypothèse que la quantité ω est très petite; dans ce cas $X_k(\omega)$ sera très voisin de l'unité.

Si l'on pose

$$X_k(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x)\, e^{x\omega i}\, dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x) \cos x\omega\, dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x) \sin x\omega\, dx = \rho_k\, e^{\theta_k i},$$

de sorte que

$$\rho_k \cos\theta_k = \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x) \cos x\omega\, dx,$$
$$\rho_k \sin\theta_k = \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x) \sin x\omega\, dx,$$

et, en outre,

$$p_k(m) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_n\, f_k(x)\, dx \qquad [p_k(0) = 1]$$

on obtient, en développant suivant les puissances de ω.

$$\rho_k \cos\theta_k = 1 - \frac{p_k(2)}{2!}\omega^2 + \frac{p_k(4)}{4!}\omega^4 - \ldots,$$
$$\rho_k \sin\theta_k = p_k(1)\omega - \frac{p_k(3)}{3!}\omega^3 + \ldots.$$

Si l'on ajoute les deux membres après les avoir élevés au carré, on aura

$$\rho_k^2 = 1 - [p_k(2) - p_k^2(1)]\,\omega^2 + \left[\frac{p_k^2(2)}{4} + \frac{p_k(4)}{12} - \frac{p_k(1)\,p_k(3)}{3}\right]\omega^4 - \ldots.$$

D'autre part, en divisant la première équation par la seconde, et en développant en série la fonction arc tang, on trouve

$$\theta_k = p_k(1)\omega - \left[\frac{p_k(3)}{3!} - \frac{p_k(1)p_k(2)}{2!} + \frac{p_k^3(1)}{3}\right]\omega^3 + \ldots$$

De là on déduit

$$2\log\rho_k = -\left[p_k(2) - p_k^2(1)\right]\omega^2 + \frac{1}{12} \times \left[p_k(4) - 3p_k^2(2) + 12p_k(2)p_k^2(1) - 4p_k(1)p_k(3) - 6p_k^4(1)\right]\omega^4 - \ldots$$

ou encore

$$\rho_k = e^{-\frac{1}{2}\left[p_k(2) - p_k^2(1)\right]\omega^2 + \frac{1}{24}\left[p_k(4) - 3p_k^2(2) + 12p_k(2)p_k^2(1) - 4p_k(3)p_k(1) - 6p_k^4(1)\right]\omega^4 - \ldots}$$

Cela posé, pour avoir l'expression du coefficient A_z, il suffit de porter, sous le signe somme, le produit $X_1(\omega)X_2(\omega)\ldots X_n(\omega) = \Pi(\omega)$, exprimé en fonction de ρ et θ. On a, en effet,

$$\Pi(\omega) = \rho_1\rho_2\ldots\rho_n\, e^{\sum_1^n \theta_k}$$

de sorte que

$$A_z = \frac{dz}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \rho_1\rho_2\ldots\rho_n\, e^{\left(\sum_1^n \theta_k - z\omega\right)i}\, d\omega.$$

En faisant remarquer que θ_k est une fonction impaire de ω, cette expression devient

$$A_z = \frac{dz}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \rho_1\rho_2\ldots\rho_n \cos\left(\sum_1^n \theta_k - z\omega\right) d\omega.$$

Pour abréger l'écriture nous allons poser

$$\sum_1^n \left[p_k(2) - p_k^2(1)\right] = \sigma^2,$$

$$\frac{1}{24}\sum_1^n \left[p_k(4) - 3p_k^2(2) + 12p_k(2)p_k^2(1) - 4p_k(1)p_k(3) - 6p_k^4(1)\right] = \gamma_4.$$

$$\sum_1^n p_k(1) = \lambda,$$

$$\sum_1^n \left[\frac{p_k(3)}{3!} - \frac{p_k(1)p_k(2)}{2!} + \frac{p_k^3(1)}{3}\right] = \gamma_3$$

de telle sorte qu'en négligeant pour un instant les termes en ω d'ordre supérieur au cinquième nous aurons, d'une part

$$\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_n = e^{-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2}} (1 + \gamma_4 \omega^4)$$

et, d'autre part

$$\cos\left(\sum_1^n \theta_k - z\omega\right) = \cos[(\lambda - z)\omega - \gamma_3 \omega^3]$$
$$= \cos\omega(\lambda - z) + \gamma_3 \omega^3 \sin(\lambda - z)\omega.$$

Le coefficient A_z devient ainsi

$$A_z = \frac{dz}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2}} (1 + \gamma_4 \omega^4)[\cos(\lambda - z)\omega + \gamma_3 \omega^3 \sin(\lambda - z)\omega]\, d\omega$$

ou

$$A_z = \frac{dz}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2}} [\cos(\lambda - z)\omega + \gamma_3 \omega^3 \sin(\lambda - z)\omega + \gamma^4 \omega^4 \cos(\lambda - z)\omega]\, d\omega.$$

Comme nous avons supposé que ω était une quantité très petite, l'intégrale de Laplace

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2}} \cos(\lambda - z)\omega\, d\omega = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-\lambda)^2}{2\sigma^2}}$$

peut être remplacée par

$$\frac{1}{\pi} \int^{\pi} e^{-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2}} \cos(\lambda - z)\omega\, d\omega = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-\lambda)^2}{2\sigma^2}} = \varphi(z).$$

Enfin, si l'on fait remarquer que

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \omega^3 e^{-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2}} \sin(\lambda - z)\omega\, d\omega = -\varphi'''(z)$$

et

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \omega^4 e^{-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2}} \cos(\lambda - z)\omega\, d\omega = \varphi^{IV}(z),$$

l'expression générale de la probabilité pour que la somme de n erreurs élémentaires soit comprise entre les limites z et $z + dz$ devient

$$A_z = dz[\varphi(z) - \gamma_3 \varphi'''(z) + \gamma_4 \varphi^{(IV)}(z) + \ldots].$$

Le résultat obtenu peut se résumer ainsi : A condition que

l'erreur accidentelle soit considérée comme la somme algébrique d'un très grand nombre d'erreurs élémentaires, la probabilité $F(z)\,dz$ pour que la variable z soit comprise entre les limites z et $z + dz$ sera définie par une série de la forme

$$F(z) = A_0\varphi(z) + A_1\varphi'(z) + A_2\varphi''(z) + \ldots,$$

$A_0, A_1, A_2, \ldots$ étant des coefficients indépendants de la variable z et

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-b)^2}{2\sigma^2}}.$$

Les quantités b et σ sont deux paramètres qui ne dépendent que de la forme de la fonction $F(z)$.

L'expression $F(z)$ est appelée la fonction de fréquence du type A, et sa courbe représentative la courbe de fréquence du type A. On constate immédiatement que si l'on réduit le second membre de $F(z)$ à son premier terme, on retrouve la loi des erreurs de Gauss.

Le calcul des quantités $A_0, A_1, A_2, \ldots$ est un problème qui a été déjà étudié par Hermite. Il a, en effet, montré (¹) que tout polynome entier $F(x)$ du degré n pouvait être exprimé sous la forme

$$F(x) = \Sigma\, a_n U_n(x),$$

a_n étant des constantes et $U_n(x)$ des polynomes de degré n en x (appelés polynomes d'Hermite), et tels que $e^{-x^2}U_n(x)$ désigne la dérivée d'ordre n de la fonction e^{-x^2}. On a

$$\begin{aligned}
U_0 &= 1,\\
U_1 &= -2x,\\
U_2 &= 4x^2 - 2,\\
U_3 &= -8x_3 + 12x,\\
U_4 &= 16x^4 - 48x^3 + 12,\\
&\ldots\ldots\ldots,\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Pour revenir aux coefficients $A_0, A_1, A_2, \ldots$ nous allons introduire, à la place de e^{-x^2}, la fonction de probabilité

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-b)^2}{2\sigma^2}}.$$

(¹) *Comptes rendus*, t. LVIII, p. 93 et 266.

Dans ce cas les polynomes d'Hermite deviennent

$$U_0 = 1,$$
$$U_1 = -\frac{x-b}{\sigma^2},$$
$$U_2 = \left(\frac{x-b}{\sigma^2}\right)^2 - \frac{1}{\sigma^2},$$
$$U_3 = -\left(\frac{x-b}{\sigma^2}\right)^3 + 3\frac{x-b}{\sigma^4},$$
$$U_4 = \left(\frac{x-b}{\sigma^2}\right)^4 - 6\left(\frac{x-b}{\sigma^2}\right)^2 + 3\frac{1}{\sigma^4}.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Or, si l'on pose

$$R_{m,n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, U_m(x)\, U_n(x)\, dx$$

en appliquant la méthode d'intégration par parties, on trouve que $R_{m,n} = 0$, toutes les fois que $m \neq n$. Si, au contraire, $m = n$ on aura, en se rappelant que

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = 1,$$
$$R_{m,n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, U_m^2(x)\, dx = \frac{m!}{\sigma^{2m}}.$$

Ceci posé, il sera facile d'en déduire les valeurs des coefficients en question. Pour cela nous allons multiplier les deux membres de l'expression

$$F(x) = A_0\varphi(x) + A_1\varphi'(x) + A_2\varphi''(x) + \ldots$$

successivement par $U_0(x)$, $U_1(x)$, $U_2(x)$, ... relatifs à la fonction $\varphi(x)$.

Intégrant les expressions ainsi obtenues entre les limites $-\infty$ et $+\infty$, en tenant compte des résultats précédents, il vient

$$A_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, dx.$$
$$A_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, U_1(x)\, dx,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$A_n = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, U_n(x)\, dx.$$

Si, enfin, après avoir remplacé les quantités $U_n(x)$ par leurs valeurs données plus haut, l'on introduit les moments de la fonction $F(x)$, définis par la formule

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-b)^n F(x)\, dx,$$

les coefficients cherchés deviennent

$$A_0 = \mu_0,$$
$$A_1 = -\mu_1,$$
$$A_2 = \frac{1}{2!}(\mu_2 - \sigma^2 \mu_0),$$
$$A_3 = \frac{1}{3!}(-\mu_3 + 3\sigma^2 \mu_1),$$
$$A_4 = \frac{1}{4!}(\mu_4 - 6\sigma^2 \mu_2 + 3\sigma^4 \mu_0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pour terminer il nous reste à définir les deux paramètres b et σ.

La quantité b n'est autre chose que la distance à l'origine de l'axe par rapport auquel on prend les moments μ_n. Elle peut être choisie de plusieurs manières, ainsi par exemple :

1° Si l'on donne à b une valeur telle que l'ordonnée $F(b)$ divise l'aire comprise entre la courbe de fréquence et l'axe des abscisses en deux parties égales, on aura

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, dx = 2 \int_{b}^{+\infty} F(x)\, dx.$$

Dans ce cas b peut être appelé la valeur *centrale*.

2° On peut choisir b de telle sorte que $F(b)$ soit l'ordonnée maxima de la courbe de fréquence, nous l'appellerons alors la valeur *maxima*.

3° Si l'on définit b de sorte que l'on ait

$$b = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x F(x)\, dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, dx},$$

on l'appellera valeur *moyenne*. C'est cette dernière valeur de b

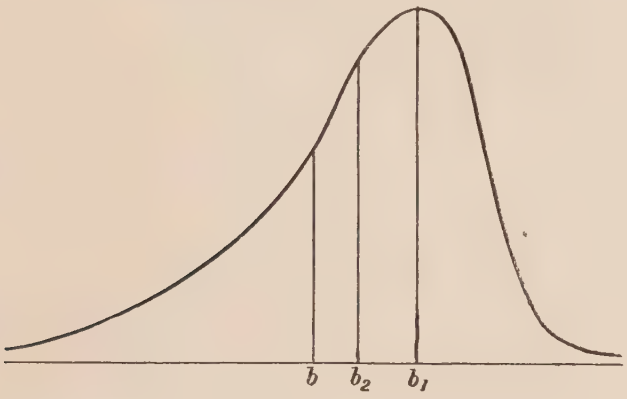
que nous allons adopter pour la suite du calcul. La conséquence immédiate de ce choix est que le coefficient A_1, défini par

$$A_1 = -\mu_1 = -\int_{-\infty}^{+\infty} (x-b)F(x)\,dx,$$

devient égal à zéro.

Dans la figure 6, on voit les positions relatives de ces trois quan-

Fig. 6.



tités :

b = la valeur moyenne (mean);

b_1 = la valeur maxima (mode);

b_2 = la valeur centrale (médian).

On voit facilement que ces trois valeurs coïncident si la courbe de fréquence suit la loi de Gauss.

Le paramètre σ caractérise la densité des mesures autour de la valeur moyenne. Nous allons l'appeler, avec M. Charlier, le coefficient de dispersion ou, simplement, *la dispersion*. Sa valeur numérique est donnée par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x-b)^2 F(x)\,dx - \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,dx = 0.$$

En d'autres termes, on la choisit de façon à annuler le coefficient A_2. L'expression de la courbe de fréquence du type A devient ainsi

$$F(x) = A_0\varphi(x) + A_3\varphi'''(x) + A_4\varphi^{IV}(x) + \ldots,$$

les coefficients A_0, A_3, A_4 ayant les valeurs données plus haut.

Pour faciliter la construction des courbes et le calcul numérique des coefficients et paramètres, ainsi que pour permettre de comparer directement les différentes courbes de fréquence, on peut introduire quelques modifications intéressant la forme des coefficients et de la fonction $F(x)$ elle-même.

Remarquons d'abord que l'expression

$$F(x) = A_0\varphi(x) + A_3\varphi'''(x) + A_4\varphi^{IV}(x) + \dots,$$

peut s'écrire

$$\sigma F(x) = A_0\left[\sigma\varphi(x) + \frac{A_3}{A_0\sigma^3}\sigma^4\varphi'''(x) + \frac{A_4}{A_0\sigma^4}\sigma^5\varphi^{IV}(x) + \dots\right]$$

Et si l'on pose

$$\beta_n = \frac{A_n}{A_0\sigma^n} = \frac{A_n}{\mu_0\sigma^n}.$$

la fonction de fréquence prend la forme

$$\sigma F(x) = \mu_0[\sigma\varphi(x) + \beta_3\sigma^4\varphi'''(x) + \beta_4\sigma^5\varphi^{IV}(x) + \dots]$$

où

$$\beta_3 = -\frac{1}{3!}\frac{\mu_3}{\mu_0\sigma^3} \qquad \text{et} \qquad \beta_4 = \frac{1}{4!}\left(\frac{\mu_4}{\mu_0\sigma^4} - 3\right).$$

Le calcul sera encore davantage simplifié si l'on tient compte de la relation

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(x-b)^n F(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n F(x)\,dx - C_n^1 b\int_{-\infty}^{+\infty} x^{n-1}F(x)\,dx + C_n^2 b^2\int_{-\infty}^{+\infty} x^{n-2}F(x)\,dx - + \dots + (-1)^n b^n\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,dx,$$

de telle sorte qu'en introduisant les notations

$$\mu'_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n F(x)\,dx, \qquad \nu_n = \frac{\mu_n}{\mu_0} \qquad \text{et} \qquad \nu'_n = \frac{\mu'_n}{\mu'_0},$$

on aura les formules suivantes :

$$\mu'_n = \Sigma x^n F(x) \qquad \nu_3 = \nu'_3 - 3b\nu'_2 + 2b^3 \qquad \beta_3 = -\frac{\nu^3}{6\sigma^3},$$

$$b = \nu'_1 \qquad \nu_4 = \nu'_4 - 4b\nu'_3 + 6b^2\nu'_2 - 3b^4 \qquad \beta_4 = \frac{1}{24}\left(\frac{\nu_4}{\sigma^4} - 3\right)$$

$$\sigma^2 = \nu_2 = \nu'_2 - b^2.$$

Une fois les quantités b, σ, β_3, β_4 calculées, la fonction de fréquence sera entièrement définie, et l'on pourra entreprendre la discussion statistique d'un ensemble d'observations.

Avant de passer aux applications mêmes des formules précédentes, il sera de toute utilité de donner une interprétation géométrique des différentes quantités définissant la fonction de fréquence du type A.

Les quantités b et σ ont été déjà définies : la première désigne la moyenne arithmétique de la caractéristique observée ; la seconde, qui est une longueur, sert de mesure de la densité des observations autour de la moyenne. Lorsque la fonction $F(x)$ se réduit à son premier terme, $\pm\sigma$ est l'abscisse correspondant aux points d'inflexion de la courbe de probabilité.

Pour montrer la signification du coefficient β_3 nous supposerons, pour un instant, que la fonction $\sigma F(x)$ se compose de deux termes seulement

$$\sigma F(x) = \mu_2[\sigma\varphi(x) + \beta_3\sigma^4\varphi'''(x)].$$

Or, les produits $\sigma\varphi(x)$ et $\sigma^4\varphi'''(x)$ sont des fonctions d'une seule variable $\frac{x-b}{\sigma}$, de sorte que leurs valeurs peuvent être calculées d'avance et une fois pour toutes pour les différentes valeurs de l'argument $\frac{x-b}{\sigma}$ (Table I) (¹).

TABLE I.

$\frac{x-b}{\sigma}$	−3,0.	−2,5.	−2,0.	−1,5.	−1,0.	−0,5.	0,0.
$\sigma\varphi(x)$.....	0,004	0,018	0,054	0,13-	0,242	0,352	0,399
$\sigma^4\varphi'''(x)$....	+0,080	+0,142	+0,108	−0,146	−0,484	−0,484	0,000
$\sigma^5\varphi^{IV}(x)$....	+0,130	+0,080	−0,270	−0,704	−0,484	+0,550	+1,197

$\frac{\sigma}{x-b}$	+0,5.	+1,0.	+1,5.	+2,0	+2,5.	+3,0.
$\sigma\varphi(x)$.....	0,352	0,242	0,130	0,054	0,018	0,004
$\sigma^4\varphi'''(x)$.....	+0,484	+0,484	+0,146	−0,208	−0,142	=0,080
$\sigma^5\varphi^{IV}(x)$.....	+0,550	−0,484	−0,704	−0,270	+0,080	+0,135

Si l'on fait remarquer que le coefficient β_3 dépasse rarement 0,5 en valeur absolue, et si l'on calcule, à l'aide de cette table, les

(¹) CHARLIER, *Researches in to the Theory of Probabylity*. Medd, série II, n° 4.

valeurs de la fonction $\frac{\sigma}{\mu_0} F(x)$ en prenant, par exemple, $\beta_3 = +0,2$, on obtiendra une courbe de fréquence ressemblant à celle de la figure 2. La courbe cesse d'être symétrique et est décalée vers la droite, ou vers la gauche suivant que la valeur du coefficient β_3 est positive ou négative. Ainsi le coefficient du second terme a pour effet de rendre la courbe en quelque sorte oblique. On l'appellera le coefficient d'obliquité, ou simplement *obliquité*.

Ce que nous venons de dire suppose, bien entendu, que tous les coefficients d'indice supérieur à 3 sont égaux à zéro, ou tout au moins négligeables par rapport à β_3, en particulier ceux d'indice impair. En général c'est ce qui arrive dans la pratique. Mais si ce n'était pas le cas, β_3 ne pourrait plus être considéré comme la mesure de l'obliquité, car tous les coefficients d'indice impair contribuent à rendre la courbe de fréquence oblique.

De même, pour faire mieux ressortir la signification et l'effet produit par le troisième terme, $\beta_4 \sigma^5 \varphi^{IV}(x)$, sur l'aspect des courbes, on supposera $\beta_3 = 0$ ainsi que tous les coefficients d'indice supérieur au 4. La fonction $F(x)$ se trouve ainsi réduite à

$$\sigma F(x) = \mu_0 [\varphi(x) + \beta_4 \sigma^5 \varphi^{IV}(x)].$$

Supposons maintenant que l'on donne au coefficient β_4 les valeurs $+0,1$ et $-0,1$ par exemple. A l'aide de la Table I on pourra calculer deux groupes de valeurs pour la fonction $\frac{\sigma}{\mu_0} F(x)$, la première correspondant à la valeur $\beta_4 = +0,1$, la seconde à $\beta_4 = -0,1$. A ces deux groupes correspondent deux courbes de fréquence ressemblant à celles données dans la figure 3. Pour les valeurs positives de β, les courbes s'élèvent plus haut que la courbe normale (tracée en pointillé), pour les valeurs négatives de β_4, au contraire les courbes offrent l'aspect de celle tracée en gros.

Le terme en β_4 affecte donc surtout la courbure de la courbe de fréquence au point du maximum des fréquences. Pour les valeurs négatives de β_4, la courbure, en ce point, change de sens. En adoptant le nom que M. Charlier donne au coefficient β_4, nous l'appellerons *l'excès* de la courbe de fréquence.

Quelquefois on peut avoir à évaluer les quantités dénommées valeur maxima et valeur centrale d'une courbe de fréquence. Le

calcul même ne présente aucune difficulté et voici comment on les détermine.

Considérons d'abord la valeur maxima, c'est-à-dire la valeur de l'ordonnée maxima de la courbe. Si, au point $x = \xi$,

$$F(x) = A_0 \varphi(x) + A_3 \varphi'''(x) + A_4 \varphi^{IV}(x) + \dots$$

a un maximum,

$$F'(\xi) = A_0 \varphi'(\xi) + A_3 \varphi^{IV}(\xi) + A_4 \varphi^{V}(\xi) + \dots = 0.$$

En introduisant dans cette expression la variable $\frac{\xi - b}{\sigma} = z$, d'après les notations déjà connues, on trouve

$$\sigma \varphi'(z) + \beta_3 \sigma^4 \varphi^{IV}(z) + \beta_4 \sigma^5 \varphi^{V}(z) + \dots = 0,$$

c'est-à-dire

$$-z + \beta_3 (z^4 - 6z^2 + 3) + \beta_4 (-z^5 + 10z^3 - 15z) + \dots = 0.$$

Or, nous admettons que les coefficients A_3, A_4, ..., sont des quantités petites, donc la quantité z, satisfaisant à cette équation, doit être également petite, de sorte que si l'on néglige les termes en z d'ordre supérieur au second, on aura

$$z = \frac{3\beta_3}{1 + 15\beta_4}.$$

Si, en plus, l'excès β_4 de la courbe peut être négligé, la valeur maxima cherchée devient

$$\xi = b + 3\sigma\beta_3.$$

En mettant cette équation sous la forme

$$3\beta_3 = \frac{\xi - b}{\sigma},$$

on peut remarquer que l'obliquité de la courbe est définie a l'aide de la différence entre les valeurs maxima et moyenne.

Considérons maintenant la valeur centrale que nous désignerons par ζ. On a par définition

$$\int_{-\infty}^{\zeta} F(x)\,dx = \int_{\zeta}^{\infty} F(x)\,dx$$

ou explicitement

$$A_0 \int_{-\infty}^{\zeta} \varphi(x)\,dx - A_0 \int_{\zeta}^{\infty} \varphi(x)\,dx + 2A_3\varphi''(\zeta) + 2A_4\varphi'''(\zeta) + \ldots = 0.$$

Comme précédemment, nous supposons que les coefficients A_3, A_4, ... soient des quantités petites. Or, b étant la valeur moyenne, on a

$$\int_{-\infty}^{b} \varphi(x)\,dx = \int_{b}^{\infty} \varphi(x)\,dx.$$

Il en résulte donc que ζ diffère très peu de b, de telle sorte que, z étant une quantité petite, l'on aura

$$\zeta = b + \sigma z.$$

Mais, d'autre part, on a

$$\int_{-\infty}^{\zeta} \varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{b} \varphi(x)\,dx + \int_{b}^{\zeta} \varphi(x)\,dx,$$
$$\int_{\zeta}^{\infty} \varphi(x)\,dx = \int_{b}^{\infty} \varphi(x)\,dx - \int_{b}^{\zeta} \varphi(x)\,dx,$$

d'où l'on déduit

$$\int_{-\infty}^{\zeta} \varphi(x)\,dx - \int_{\zeta}^{\infty} \varphi(x)\,dx = 2\int_{b}^{\zeta} \varphi(x)\,dx = 2\sigma \int_{0}^{z} \varphi(b+\sigma z)\,dz.$$

En substituant, sous le signe somme, la valeur de

$$\sigma\varphi(b+\sigma z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

nous pourrons développer cette expression en une série suivant les puissances de z. Si, en plus, après l'avoir intégrée, on néglige les coefficients β_5, β_6, ..., ainsi que les termes en z d'ordre supérieur au deuxième, on trouve

$$z - \beta_3 + 3\beta_4 z = 0,$$

c'est-à-dire

$$z = \frac{\beta_3}{1 + 3\beta_4},$$

par conséquent

$$\zeta = b + \frac{\sigma\beta_3}{1 + 3\beta_4},$$

ou, en supposant β_4 négligeable,

$$\zeta = b + \sigma\beta_3.$$

Ainsi donc, si l'excès β_4 d'une courbe est faible, les positions relatives des valeurs maxima ξ, centrale ζ et moyenne b se rangent dans l'ordre

$$b < \zeta < \xi.$$

Si l'on a à comparer plusieurs courbes de fréquence entre elles, il y a avantage à mettre les équations sous une forme homogène que l'on obtient facilement en posant

$$\frac{x-b}{\sigma} = \xi \qquad \text{et} \qquad \frac{\sigma}{\mu_0} F(x) = \eta.$$

Si, en plus, on pose

$$\sigma\varphi(x) = \varphi_0(\xi), \qquad \sigma^4\varphi'''(x) = \varphi_3(\xi), \qquad \sigma^5\varphi^{IV}(x) = \varphi_4(\xi),$$

la fonction de fréquence du type A prend la forme

$$\eta = \varphi_0(\xi) + \beta_3\varphi_3(\xi) + \beta_4\varphi_4(\xi).$$

La comparaison des différentes courbes du type A est ainsi rendue immédiate, car deux courbes quelconques ne diffèrent plus que par les valeurs des coefficients β_3 et β_4.

En résumé, et d'une manière générale, les trois premiers termes ainsi définis de la fonction A suffiront pratiquement pour la discussion statistique et la représentation de la majorité des séries d'observations. Les termes d'ordre supérieur au quatrième ne pourront cependant être négligés si la discussion porte sur un très grand nombre d'observations d'une espèce. De même, si la représentation des observations, avec les trois premiers termes n'était pas satisfaisante, on devrait pousser les calculs plus loin et voir ce que l'on obtiendrait en tenant compte des termes en β_5 et β_6.

Pour terminer l'étude de la fonction de fréquence du type A, nous donnerons un schéma (1) pour le calcul numérique des coefficients et paramètres, qui est de toute utilité dans les applications.

---

(1) Sauf quelques modifications que l'on croyait utiles, on a adopté le schéma de M. Charlier, voir *Medd.* 2ª série, nº 4, p. 14.

TABLE II.

Calcul des moments.

x.	x^2.	$F(x)$.	x^3.	x^4.	$xF(x)$.	$x^2F(x)$.	$x^3F(x)$.	$x^4F(x)$.	$(x+1)^4$.	$(x+1)^4F(x)$.
−7	49		−343	2401					1296	
−6	36		−216	1296					625	
−5	25		−125	625					256	
−4	16		− 64	256					81	
−3	9		− 27	81					16	
−2	4		− 8	16					1	
−1	1		− 1	1					0	
				$\Sigma'_n =$						
0	0		0	0					1	
+1	1		+ 1	1					16	
+2	4		+ 8	16					81	
+3	9		+ 27	81					256	
+4	16		+ 64	256					625	
+5	25		+125	625					1296	
+6	36		+216	1296					2401	
+7	49		+343	2401					4096	
				$\Sigma''_n =$						
				$\Sigma'_n + \Sigma''_n = \mu'_n =$						

Pour vérifier le calcul des moments on a la formule

$$\Sigma(x+1)^4 F(x) = \mu'_4 + 4\mu'_3 + 6\mu'_2 + 4\mu'_1 + \mu'_0.$$

TABLE III.

Calcul des paramètres et des coefficients.

								ρ'_4			ρ_4	
						ρ'_3		$-4b\rho'_3$			$4b\rho_3$	
		ρ'_2				$-3b\rho'_2$		$6b^2\rho'_2$			$6b^2\rho^2$	
	ρ'_1	$-b^2$				$2b^3$		$-3b^4$			b^4	
$\Sigma =$	b	$\nu^2 = \sigma^2$				ρ^3		ρ^4			ρ'_4	

La vérification du calcul des quantités ν_n se fait à l'aide de la formule

$$\nu'_4 = \nu_4 + 4b\nu_3 + 6b^2\nu_2 + b^4.$$

Enfin, les coefficients β_3 et β_4 ont les valeurs

$$\beta_3 = -\frac{\nu_3}{6\sigma^3} \qquad \text{et} \qquad \beta_4 = \frac{1}{24}\left(\frac{\nu^4}{\sigma^4} - 3\right).$$

Une application numérique complète des méthodes précédentes sera donnée dans la seconde partie de ce travail (¹).

Toutes les fois qu'une quantité est déduite d'une série d'observations, il est dans l'usage que le calculateur donne, en même temps que le résultat, l'erreur moyenne à craindre sur sa valeur. Sans entrer dans les détails du calcul, nous donnerons ici les formules permettant de calculer les erreurs moyennes des différents paramètres définis dans ce qui précède. En désignant par :

n le nombre d'éléments;
M leur valeur moyenne;
σ la dispersion;
$S = 3\beta_3$ le coefficient d'obliquité;
$E = 3\beta_4$ l'excès;
$\varepsilon(x)$ = l'erreur moyenne à craindre sur la quantité x, on a

$$\varepsilon(M) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad \varepsilon(\sigma) = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}},$$
$$\varepsilon(S) = \sqrt{\frac{3,75}{n}} = \frac{1,9365}{\sqrt{n}},$$
$$\varepsilon(E) = \sqrt{\frac{0,375}{n}} = \frac{0,6124}{\sqrt{n}}.$$

Fonction de fréquence du type B. — On peut affirmer que, dans les discussions de statistique hétérograde, la fonction de fréquence se présentera le plus souvent sous la forme A. Cependant certains cas interviennent où cette expression de la loi des probabilités se trouve en défaut. Sa déduction, en effet, est basée principalement sur l'hypothèse que la quantité ω doit être très petite, de sorte que la valeur de chacune des quantités $X_n(\omega)$ est très voisine de l'unité.

Or, si l'on considère la somme

$$X_n(\omega) = \varepsilon[f_n(0) + f_n(\varepsilon)\, e^{\varepsilon\omega i} + f_n(2\varepsilon)\, e^{2\varepsilon\omega i} + \dots + f_n(-\varepsilon)\, e^{-\varepsilon\omega i} + f_n(-2\varepsilon)\, e^{-2\varepsilon\omega i} + \dots]$$

(¹) *Voir* pages 99-102.

on se rend compte que, même pour des valeurs quelconques de ω, la somme des coefficients de X_n peut être très voisine de l'unité. Il suffit, en effet, que

$$\varepsilon f_n(0) = 1 + \eta$$

η étant une quantité très petite et que les valeurs $f_n(\varepsilon), f_n(-\varepsilon), \ldots$ $f_n(n\varepsilon)$ soient très peu différentes de zéro. Il est évident que dans ce cas le raisonnement que l'on vient de faire n'est plus valable et que, par conséquent, la courbe de fréquence du type A ne peut plus servir. La loi des erreurs prend alors une autre forme, la forme B, que l'on va établir.

Envisagée sous sa forme générale, la discussion analytique de la fonction de répartition du type B présente quelques difficultés. En particulier la question de convergence devient ici plus compliquée que dans le cas précédent. Aussi laisserons-nous de côté l'étude générale de la fonction de ce type pour en examiner, et d'une façon aussi succincte que possible, un cas spécial seulement, ce qui nous permettra néanmoins de distinguer nettement les propriétés caractéristiques de chacune des deux fonctions A et B.

En adoptant la définition déjà connue de l'erreur accidentelle, ce cas spécial du problème concernant la fonction B peut s'énoncer : Chacune des n causes d'erreurs élémentaires ne peut engendrer que deux erreurs : l'erreur zéro de probabilité p_n très voisine de l'unité, et l'erreur ε de probabilité q_n très voisine de zéro. Il s'agit de trouver l'expression de probabilité pour que l'erreur accidentelle soit égale à $m\varepsilon$, m étant un nombre entier.

Si l'on remarque que $p_n + q_n = 1$, d'après un théorème connu la probabilité de l'erreur cherchée sera exprimée par la valeur du coefficient du terme en $e^{m\varepsilon\omega i}$ dans le développement du produit

$$P(\omega) = \Pi(p_n + q_n e^{\varepsilon\omega i}) = e^{\sum_1^n \log(p_n + q_n e^{\varepsilon\omega i})},$$

ce que l'on peut écrire

$$P(\omega) = e^{\sum_1^n \log\left[p_n\left(1+\frac{q_n}{p_n}e^{\varepsilon\omega i}\right)\right]} = e^{\sum_1^n \log p_n + \sum_1^n \log\left(1+\frac{q_n}{p_n}e^{\varepsilon\omega i}\right)}.$$

Et si l'on observe que $p_n > q_n$

$$P(\omega) = e^{\sum_1^n \log p_n + \sum_1^n \frac{q_n}{p_n} e^{\varepsilon\omega i} - \frac{1}{2}\sum_1^n \left(\frac{q_n}{p_n}\right) e^{2\varepsilon\omega i} + \ldots}.$$

Mais

$$p_n = 1 - q_n,$$

de sorte que, d'une part, on a

$$\log p_n = -\left[q_n + \frac{q_n^2}{2} + \frac{q_n^3}{3} + \ldots\right]$$

et d'autre part

$$\frac{q_n}{p_n} = \frac{q_n}{1 - q_n} = q_n + q_n^2 + \ldots.$$

Donc, en négligeant les termes d'ordre supérieur au premier, on a

$$P(\omega) = e^{-\sum_1^n q_n + \sum_1^n q_n e^{\varepsilon\omega i}}.$$

D'après le théorème déjà cité de la théorie des fonctions, on déduit successivement pour la probabilité de l'erreur accidentelle $m\varepsilon$, l'expression

$$B = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} P(\omega)\, e^{-m\varepsilon\omega i}\, d\omega$$

ou

$$B = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-\sum_1^n q_n + \sum_1^n q_n \cos\varepsilon\omega + i\left(\sum_1^n q_n \sin\varepsilon\omega - m\varepsilon\omega\right)}\, d\omega$$

ou encore

$$B = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-\sum_1^n q_n + \sum_1^n q_n \cos\varepsilon\omega} \cos\left(\sum_1^n q_n \sin\varepsilon\omega - m\varepsilon\omega\right) d\omega.$$

Pour abréger l'écriture nous poserons

$$\sum_1^n q_n = \lambda.$$

Si, en plus, on prend $\varepsilon = 1$, l'expression précédente peut être mise sous la forme

$$\psi(z) = \frac{e^{-\lambda}}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\lambda\cos\omega}\cos(\lambda\sin\omega - z\omega)\, d\omega$$

$\psi(z)$ qui est une fonction entière et transcendante des variables z et λ, nous donne une valeur approchée de la probabilité cherchée

dont la valeur exacte est exprimée par

$$B = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} P(\omega)\, e^{-m\varepsilon\omega i}\, d\omega.$$

Si l'on considère l'expression $\psi(z)$ comme une fonction du paramètre λ, elle peut être développée en une série convergente suivant les puissances de λ. On a, en effet

$$\psi(z) = \psi_0(z) + \frac{\lambda}{1!}\frac{\partial\psi_0}{\partial\lambda} + \frac{\lambda^2}{2!}\frac{\partial^2\psi_0}{\partial\lambda^2} + \dots.$$

Quant aux valeurs des dérivées partielles, on a

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = -\frac{e^{-\lambda}}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\lambda\cos\omega}\cos(\lambda\sin\omega - z\omega)\, d\omega$$
$$+\frac{e^{-\lambda}}{\pi}\int_0^{\pi}[e^{\lambda\cos\omega}\cos\omega\cos(\lambda\sin\omega - z\omega)$$
$$- e^{\lambda\cos\omega}\sin\omega(\lambda\sin\omega - z\omega)]\, d\omega$$

ou

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = -\frac{e^{-\lambda}}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\lambda\cos\omega}\cos(\lambda\sin\omega - z\omega)\, d\omega$$
$$+\frac{e^{-\lambda}}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\lambda\cos\omega}\cos[\lambda\sin\omega - (z-1)\omega]\, d\omega = -\psi(z) + \psi(z-1).$$

De même, on trouve

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2} = \psi(z) - 2\psi(z-1) + \psi(z-2).$$

Or, si l'on remarque que

$$\psi_0(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos z\omega\, d\omega = \frac{\sin z\pi}{z\pi}$$

et que

$$\psi_0(z-r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(z-r)\omega\, d\omega = (-1)^r\frac{\sin z\pi}{(z-r)\pi}$$

le développement en série de la fonction $\psi(z)$, suivant les puissances croissantes de λ, devient

$$\psi(z) = e^{-\lambda}\frac{\sin z\pi}{\pi}\left[\frac{1}{z} - \frac{\lambda}{1!(z-1)} + \frac{\lambda^2}{2!(z-2)} - \dots\right].$$

Il en résulte que la fonction $\psi(z)$ reste finie pour toute valeur finie de λ ou de z. En effet, si l'on donne à λ une valeur finie quelconque, pour des valeurs non entières de z les fractions $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{z-1}$, $\frac{1}{z-2}$, .. , restent finies et s'annulent pour $z=\infty$. Par conséquent, si l'on pose

$$\varphi(z)=\sin\pi z\left[\frac{1}{z}-\frac{\lambda}{1!(z-1)}+\frac{\lambda^2}{2!(z-2)}-+\ldots\right]$$

de telle sorte que

$$\psi(z)=\frac{e^{-\lambda}}{\pi}\varphi(z)$$

on aura

$$|\varphi(z)|<\left|\frac{\sin\pi z}{z}\right|+\left|\frac{\lambda}{1!}\right|\left|\frac{2\sin\pi z}{z-1}\right|+\left|\frac{\lambda^2}{2!}\right|\left|\frac{\sin\pi z}{z-2}\right|+\ldots$$

et *a fortiori*

$$|\varphi(z)|<\left|\frac{1}{z}\right|+\left|\frac{\lambda}{1!}\right|\left|\frac{1}{z-1}\right|+\left|\frac{\lambda^2}{2!}\right|\left|\frac{1}{z-2}\right|+\ldots.$$

Si, en outre, on désigne par μ la valeur maxima des fractions

$$\left|\frac{1}{z}\right|,\quad\left|\frac{1}{z-1}\right|,\quad\left|\frac{1}{z-2}\right|,\quad\ldots,$$

on aura

$$|\varphi(z)|<\mu\left(1+\left|\frac{\lambda}{1!}\right|+\left|\frac{\lambda^2}{2!}\right|+\ldots\right),$$

c'est-à-dire

$$|\varphi(z)|<\mu e^{\lambda}.$$

Ou en conclut que $\varphi(z)$ reste fini pour toutes les valeurs non entières de z, par conséquent la fonction

$$\psi(z)=\frac{e^{-\lambda}}{\pi}\varphi(z)$$

également.

Pour des valeurs entières et négatives de z la fonction $\psi(z)$ s'annule, car tous les termes de la série sont égaux à zéro.

Enfin, pour des valeurs entières et positives de z, soit par exemple $z=k$, tous les termes

$$\frac{\lambda^n}{n!}\frac{\sin\pi k}{k-n}$$

si $k\neq n$, deviennent égaux à zéro. Il ne reste donc qu'à consi-

dérer le terme pour lequel $k = n$. Or, on a d'une part

$$\sin \pi k = (-1)^n \sin \pi (k - n)$$

d'autre part

$$\lim_{k=n} \frac{\sin \pi (k - n)}{k - n} = \pi,$$

par conséquent

$$\psi(k) = \frac{e^{-\lambda}}{\pi} \pi \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

donc une quantité finie.

La fonction ψ dont on vient d'examiner les principales propriétés joue, pour les fréquences du type B, un rôle équivalent à celui de $\varphi(x)$ dans le cas de la fonction A. M. Charlier a, en effet, montré (¹) qu'une fonction arbitraire $F(x)$, définie pour toutes les valeurs réelles de la variable x, et s'annulant pour $x = \pm \infty$, pouvait être représentée par une série de la forme

$$F(x) = B_0 \psi(x) + B_1 \Delta \psi(x) + B_2 \Delta^2 \psi(x) + \ldots,$$

$B_0, B_1, B_2, \ldots$ sont des coefficients indépendants de x et $\Delta\psi(x)$, $\Delta^2\psi(x)$, ... les différences successives de la fonction $\psi(x)$, définie par l'une des deux expressions :

$$\psi(x) = e^{-\lambda} \frac{\sin \pi x}{\pi} \left[\frac{1}{x} - \frac{\lambda}{1!(x-1)} + \frac{\lambda^2}{2!(x-2)} + \ldots \right]$$

ou

$$\psi(x) = \frac{e^{-\lambda}}{\pi} \int_0^{\pi} e^{\lambda \cos \omega} \cos(\lambda \sin \omega - x\omega)\, d\omega.$$

La série de $F(x)$ représente l'expression générale d'une courbe de fréquence du type B. Quant aux coefficients $B_0, B_1, B_2, \ldots$, nous nous dispenserons de donner ici les détails de leur calcul long et fastidieux (²), ce qui d'ailleurs, pour la suite, n'aura aucune importance. En introduisant les moments de différents ordres définis par

$$\mu'_n = \sum_{-\infty}^{+\infty} x^n F(x)$$

(¹) *Medd.*, n° 27.
(²) *Medd.*, n° 37, p. 23-35.

les coefficients B_0, B_1, B_2, ... deviennent

$$B_0 = \mu'_0,$$
$$B_1 = \lambda\mu'_0 - \mu'_1,$$
$$B_2 = \frac{1}{2!}[\lambda^2\mu'_0 - (2\lambda+1)\mu'_1 + \mu'_2],$$
$$B_3 = \frac{1}{3!}[\lambda^3\mu'_0 - (3\lambda^2+3\lambda+2)\mu'_1 + 3(\lambda+1)\mu'_2 - \mu'_3],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dans les applications cependant, faute de tables calculées pour toutes les valeurs de la variable x, on ne se sert pas de la fonction $\psi(x)$ telle que l'on vient de la définir. Jusqu'à présent on ne dispose que des tables calculées pour les valeurs entières seulement de x (1). Or dans ce cas, nous l'avons montré, la fonction de probabilité $\psi(x)$ prend la forme

$$\psi(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}.$$

Le paramètre λ peut être choisi de façon à annuler le coefficient B_1, sa valeur, dans ce cas, coïncide avec la moyenne des x. D'une manière générale, si la fonction $\psi(x)$ contient n paramètres arbitraires, on pourra s'en servir utilement pour augmenter la convergence de la série générale en faisant disparaître un certain nombre de coefficients.

Ainsi, en choisissant convenablement les paramètres λ, c et ω, une courbe de fréquence du type B peut être représentée approximativement par l'équation

$$F(x) = B_0\psi_\lambda\left(\frac{x-c}{\omega}\right).$$

En d'autres termes, on a choisi les quantités λ, ω et c de façon à annuler les coefficients B_1, B_2, B_3. Pour cela il faut qu'en posant

$$\mu'_0\nu'_n = \mu'_n$$

l'on ait

$$\nu'_1 - c = \omega\lambda,$$
$$\nu'_2 - 2c\nu'_1 + c^2 = \omega^2(\lambda^2+\lambda),$$
$$\nu'_3 - 3c\nu'_2 + 3c^2\nu'_1 - c^3 = \omega^3(\lambda^3+3\lambda^2+\lambda),$$

(1) Bortkewitch, *Das Gesetz der kleinen Zahlen.* — Charlier, *Medd.*, 2e série, n° 4.

ou, en introduisant les moments autour de la moyenne dont l'abscisse est b,

$$b - c = \omega\lambda,$$
$$\nu_2 + (b-c)^2 = \omega^2(\lambda^2+\lambda),$$
$$\nu_3 + 3\nu_2(b-c) + (b-c)^3 = \omega^3(\lambda^3+3\lambda^2+\lambda).$$

De là on déduit les valeurs suivantes pour les paramètres

$$\omega = \frac{\nu_3}{\nu_2},$$
$$\lambda = \frac{\nu_2^3}{\nu_3^2},$$
$$c = b - \frac{\nu_2^2}{\nu_3},$$

on a, en outre,

$$B_0 = \frac{\mu_0}{\omega}$$

Avec la Table II (p. 17), servant à calculer les moments de différents ordres, les formules données ci-dessus comportent tout ce qui est nécessaire pour la construction d'une courbe de fréquence B (¹).

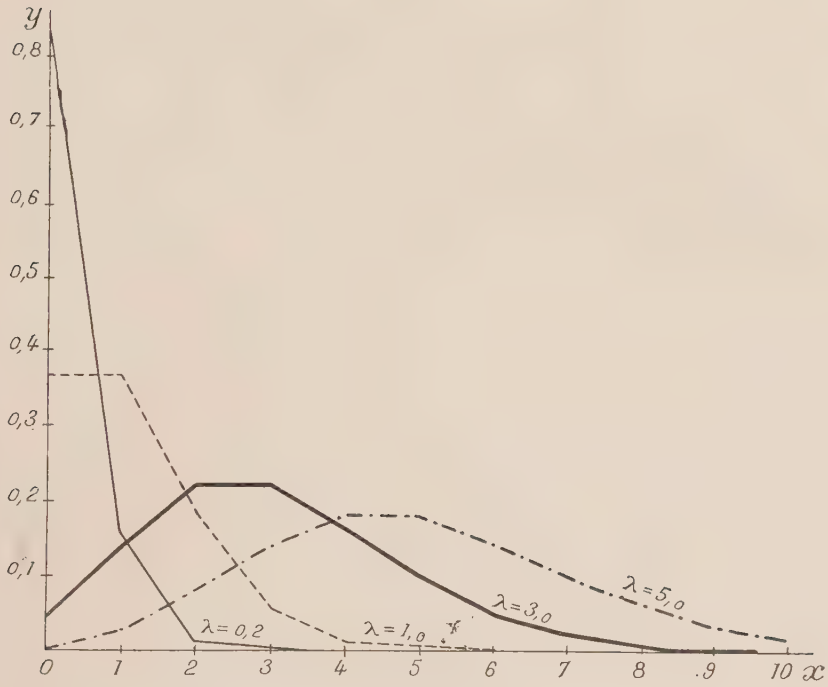
La figure 7 permet de se faire une idée de l'aspect des différentes courbes de fréquence du type B suivant les valeurs que l'on donne au paramètre λ. On voit que, pour les valeurs croissantes de λ, les courbes tendent à se rapprocher de celles du type A.

Pour terminer l'étude des deux formes de la loi des erreurs d'observations on peut dire que, si l'on considère les écarts comme des sommes d'un grand nombre d'erreurs élémentaires, la courbe de fréquence ne pourra prendre d'autres formes que celle des types A ou B. [Nous avons laissé de côté le cas d'une courbe résultant d'une superposition de plusieurs courbes de ces deux types.] Reste à savoir encore, lorsqu'on a à discuter une série d'observations, laquelle des deux courbes doit-on employer; en d'autres termes, laquelle des deux courbes représentera mieux les observations en question. Il n'existe pas de règles bien établies; il y a même des cas où la même série d'observations peut être repré-

(¹) Pour une discussion détaillée de la fonction B voir *Medd.*, 2ᵉ série, nº 4, p. 22–30.

sentée aussi bien par l'une que par l'autre courbe (¹). Néanmoins le calculateur pourra facilement, connaissant l'aspect des deux

Fig. 7.



courbes types, décider du choix à faire à simple vue des données. Ainsi, comme nous venons de le voir, les courbes de probabilité du type A ressemblent beaucoup à la « courbe en cloche » définie par la loi de Gauss. Quant aux courbes du type B. on les emploie surtout dans le cas où les séries d'observations s'arrêtent brusquement pour une valeur de la quantité observée.

Dans la troisième Partie de ce travail on trouvera des exemples numériques avec tous les détails, ainsi que la construction des courbes et leur comparaison avec les observations.

Théorie des Corrélations. — Dans ce qui précède il n'a été question que des séries d'observations portant sur une seule propriété des données. Le problème à résoudre consistait à trouver

(¹) *Medd.*, 2ᵉ série, nº 4, p. 15, *Exemple* 1.

la fonction ou la courbe de fréquence, d'une variable, relative à la répartition du caractère considéré. Un nouveau problème se pose lorsqu'on veut étudier simultanément deux séries d'observations différentes, ou deux propriétés d'une même série statistique. En particulier, lorsqu'on se propose de rechercher s'il existe, entre les éléments des deux catégories, une certaine correspondance ou, mieux, une corrélation. Ainsi, par exemple, au point de vue statistique, le rendement annuel des récoltes et la quantité de pluie tombée sont des quantités liées par une corrélation.

Le problème des corrélations présente plusieurs cas, suivant que les variables sont de nombres entiers ou de quantités susceptibles d'une variation continue, indépendantes entre elles ou liées par des relations connues.

On appellera $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la fonction de corrélation des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_n)\, dz_1, dz_2, \ldots, dz_n$$

exprime la probabilité pour que l'on ait simultanément

$$z_1 - \frac{1}{2} dz_1 < x_1 < z_1 + \frac{1}{2} dz_1, \qquad z_2 - \frac{1}{2} dz_2 < x_2 < z_2 + \frac{1}{2} dz_2, \qquad \ldots,$$

$$z_n - \frac{1}{2} dz_n < x_n < z_n + \frac{1}{2} dz_n$$

ou

$$x_1 = z_1, \qquad x_2 = z_2, \qquad \ldots, \qquad x_n = z_n,$$

suivant que les quantités x varient d'une manière continue, ou seulement par des valeurs entières.

Sous sa forme la plus générale, la solution du problème des corrélations se trouve résumée dans le théorème suivant :

Etant données n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ avec leurs fonctions de fréquence appartenant au type A, et $m (< n)$ fonctions linéaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ de ces variables, la fonction de corrélation $F(z_1, z_2, \ldots, z_m)$, exprimant la probabilité pour que l'on ait simultanément,

$$z_1 - \frac{1}{2} dz_1 < \lambda_1 < z_1 + \frac{1}{2} dz_1,$$

$$z_2 - \frac{1}{2} dz_2 < \lambda_2 < z_2 + \frac{1}{2} dz_2,$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots,$$

$$z_m - \frac{1}{2} dz_m < \lambda_m < z_m + \frac{1}{2} dz_m,$$

est définie par

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_m) = \varphi(z_1, z_2, \ldots, z_m) + \Sigma A_{k_1, k_2, \ldots, k_m} \frac{\partial \varphi^{k_1+k_2+\ldots+k_m}}{\partial z_1^{k_1} \partial z_2^{k_2} \ldots \partial z_m^{k_m}} \quad (k_1+k_2+\ldots+k_m \geq 3),$$

la fonction auxiliaire φ ayant la forme

$$\varphi(z_1, z_2, \ldots, z_m) = C_m e^{\psi(z_1 z_2 \ldots z_m)},$$

où $\Psi(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ désigne une fonction homogène du second degré.

Afin de rendre ce théorème plus accessible au point de vue de son utilité pratique, nous allons traiter ici le problème d'une fonction de corrélation à deux variables que l'on peut ainsi énoncer :

On donne n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ainsi que leurs fonctions de fréquence respectives $f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n)$, appartenant au type A; on a, en outre, deux fonctions linéaires $h_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $h_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. On demande de trouver l'expression de la fonction de corrélation de ces deux fonctions, en d'autres termes nous cherchons la probabilité $F(z_1, z_2)dz_1 dz_2$ pour que l'on ait simultanément

$$z_1 - \frac{1}{2} dz_1 < h_1 < z_1 + \frac{1}{2} dz_1 \qquad \text{et} \qquad z_2 + \frac{1}{2} dz_2 < h_2 < z_2 + \frac{1}{2} dz_2.$$

D'après le théorème précédent, cette fonction de corrélation a la forme

$$F(z_1, z_2) = \varphi(z_1, z_2) + A_{30} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z_1^3} + A_{21} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} + A_{12} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z_1^1 \partial z_2^2} + A_{03} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z_2^3} + \ldots.$$

où

$$\varphi(z_1 z_2) = C\, e^{-\frac{1}{2}[c_{20}(z_1-b_1)^2 + 2c_{11}(z_1-b_1)(z_2-b_2) + c_{02}(z_2-b_2)^2]}.$$

Il nous reste donc à évaluer les coefficients dans le développement de la fonction de corrélation F, ainsi que les paramètres de la fonction auxiliaire φ. Comme dans le cas d'une variable, nous nous servirons pour cela de la méthode des moments.

Auparavant, nous rappelons que l'on suppose

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int F(z_1, z_2)\,dz_1\,dz_2 = 1$$

de sorte que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int \varphi(z_1, z_2)\,dz_1\,dz_2 = 1.$$

Nous désignerons, en outre, les moments par rapport à l'origine de la fonction $F(z_1, z_2)$ par

$$\nu'_{rs} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int z_1^r z_2^s F(z_1, z_2)\,dz_1\,dz_2,$$

et ceux pris par rapport aux moyennes M_1 et M_2 par

$$\nu_{rs} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int (z_1 - M_1)^r (z_2 - M_2)^s F(z_1, z_2)\,dz_1\,dz_2.$$

Pour fixer les valeurs des cinq paramètres b_1, b_2, c_{20}, c_{11}, c_{02} de la fonction auxiliaire φ, nous avons les cinq équations de conditions suivantes :

$$A_{10} = A_{01} = A_{20} = A_{11} = A_{02} = 0.$$

Cela posé, l'intégrale de Laplace nous donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z_1, z_2)\,dz_1 = C\sqrt{\frac{2\pi}{c_{20}}}\,e^{-\frac{c_{20}c_{02} - c_{11}^2}{2c_{02}}(z_2 - b_2)^2},$$

et, de même

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z_1, z_2)\,dz_2 = C\sqrt{\frac{2\pi}{c_{20}}}\,e^{-\frac{c_{20}c_{02} - c_{11}^2}{2c_{20}}(z_1 - b_1)^2}.$$

Puis, intégrée une seconde fois, chacune de ces deux expressions nous donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int \varphi(z_1, z_2)\,dz_1\,dz_2 = C\,\frac{2\pi}{\sqrt{c_{20}c_{02} - c_{11}^2}} = 1,$$

d'où

$$C = \frac{1}{2\pi}\sqrt{c_{20}c_{02} - c_{11}^2},$$

ou encore, si l'on désigne $c_{20}c_{02} - c_{11}^2 = \Delta$,

$$C = \frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi}.$$

Ainsi donc, connaissant c_{20}, c_{02} et c_{11}, on pourra calculer la quantité C.

Pour évaluer les paramètres b_1, b_2, on a, par définition

$$v'_{10} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int z_1 F(z_1, z_2)\,dz_1\,dz_2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int z_1 \varphi(z_1, z_2)\,dz_1\,dz_2$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} z_1\,dz_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z_1, z_2)\,dz_2$$

$$= C\sqrt{\frac{2\pi}{c_{02}}}\int_{-\infty}^{+\infty} z_1 e^{-\frac{\Delta}{2c_{02}}(z_1 - b_1)^2}\,dz_1,$$

Or, le second membre peut s'écrire

$$C\sqrt{\frac{2\pi}{c_{02}}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}(z_1 - b_1)e^{-\frac{\Delta}{2c_{02}}(z_1-b_1)^2}\,dz_1 + b_1\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\Delta}{2c_{02}}(z_1-b_1)^2}\,dz_1\right]$$

de là, en tenant compte de la valeur de C,

$$v'_{10} = C\sqrt{\frac{2\pi}{c_{02}}}\,b_1\sqrt{\frac{2\pi c_{02}}{\Delta}} = b_1\frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi}\frac{2\pi\sqrt{c_{02}}}{\sqrt{\Delta c_{02}}} = b_1.$$

Mais, comme v'_{10} est la moyenne des z_1, que nous avions déjà appelée M_1, on a $b_1 = M_1$. De même on trouvera facilement que $b_2 = M_2$.

En introduisant les valeurs trouvées pour b_1 et b_2 dans l'expression de $\varphi(z_1, z_2)$ on obtient, après avoir posé

$$x = z_1 - M_1 \qquad \text{et} \qquad y = z_2 - M_2$$

$$\varphi(x, y) = \frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi}\,e^{-\frac{1}{2}(c_{20}x^2 + 2c_{11}xy + c_{02}y^2)}.$$

Pour ce qui suivra, il y a avantage à désigner les moments de la

fonction $\varphi(x, y)$ par

$$\lambda_{rs} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int x^r y^s \varphi(x, y)\, dx\, dy.$$

De ce qui précède, on conclut que

$$\lambda_{00} = +1 \qquad \text{et} \qquad \lambda_{01} = \lambda_{10} = 0.$$

Quant aux moments d'ordre supérieur, on les obtient facilement à l'aide de la formule connue

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-\frac{1}{2}ax^2} = \frac{1\ 3\ 5\ \ldots\ (2n-1)}{a^n}\sqrt{\frac{2\pi}{a}}.$$

En effet, pour les trois premiers moments du second ordre, on trouve :

$$\lambda_{20} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int x^2 \varphi(x, y)\, dx\, dy = \frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int x^2 e^{-\frac{1}{2}(c_{20}x^2 + 2c_{11}xy + c_{02}y^2)}\, dx\, dy.$$

L'exposant, sous le signe somme, peut s'écrire

$$c_{20}x^2 + 2c_{11}xy + c_{02}y^2 = \frac{c_{20}c_{02} - c_{11}^2}{c_{02}}x^2 + \frac{1}{c_{02}}(c_{02}y + c_{11}x)^2,$$

de sorte que l'on a

$$\lambda_{20} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}\frac{c_{02}c_{20} - c_{11}^2}{c_{02}}x^2}\, dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2c_{02}}(c_{02}y + c_{11}x)^2}\, dy.$$

En intégrant une première fois, on obtient, après avoir effectué le changement de variables

$$\frac{c_{02}y + c_{11}x}{\sqrt{c_{02}}} = u,$$

$$\lambda_{20} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{c_{02}}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}\frac{\Delta}{c_{02}}x^2}\, dx.$$

De là, enfin, en appliquant la formule citée précédemment

$$\lambda_{20} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{c_{02}}}\,\frac{c_{02}}{\Delta}\sqrt{\frac{2\pi c_{02}}{\Delta}} = \frac{c_{02}}{\Delta}.$$

De même, on peut démontrer que l'on a

$$\lambda_{02} = \frac{c_{20}}{\Delta}.$$

Quant à λ_{11}, on a

$$\lambda_{11} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty}\int xy\, e^{-\frac{1}{2}\left(c_{20}x^2 + 2c_{11}xp + c_{02}y^2\right)} dx\, dy$$

$$= \frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-\frac{1}{2}\frac{c_{20}c_{02} - c_{11}^2}{c_{20}} x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} y\, e^{-\frac{(c_{02}y + c_{11}x)^2}{2c_{02}}} dy.$$

Par le changement de variables déjà indiqué, on trouve, après avoir intégré une première fois

$$\lambda_{11} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi} \frac{c_{11}\sqrt{\pi}}{\sqrt{c_{02}^3}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}\frac{\Delta}{c_{20}}x^2} dx = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi} \frac{c_{11}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{c_{02}^3}} \frac{c_{02}}{\Delta} \sqrt{\frac{2\pi c_{02}}{\Delta}} = -\frac{c_{11}}{\Delta}.$$

Une fois connus, les moments de différents ordres de la fonction $\varphi(x, y)$, on en déduira très aisément successivement ceux de la fonction de corrélation $F(z_1, z_2)$. Il suffit, en effet, de multiplier l'expression de $F(z_1, z_2)$ par x^2, y^2 et xy, et l'on a

$$\nu_{20} = \lambda_{20}, \qquad \nu_{02} = \lambda_{02} \qquad \text{et} \qquad \nu_{11} = \lambda_{11}.$$

Il en résulte immédiatement que

$$\nu_{20}\nu_{02} - \nu_{11}^2 = \frac{1}{\Delta}.$$

Quant aux paramètres mêmes, on a

$$c_{20} = \nu_{02}\Delta, \qquad c_{02} = \nu_{20}\Delta, \qquad c_{11} = -\nu_{11}\Delta$$

Connaissant les valeurs des paramètres en fonction des moments, on déduit, pour les dispersions de z_1 et z_2.

$$\sigma_1^2 = \frac{c_{02}}{\Delta} = \nu_{20},$$

$$\sigma_2^2 = \frac{c_{20}}{\Delta} = \nu_{02}.$$

Définition du coefficient de corrélation. — En résumé de ce qui précède, voici ce que nous pouvons dire. Lorsqu'on considère

deux variables indépendantes x et y, leurs fonctions de fréquence $f_1(x), f_2(y)$ étant du type A, les probabilités pour que l'on ait

$$x - \frac{1}{2}dx < x < x + \frac{1}{2}dx \qquad \text{et} \qquad y - \frac{1}{2}dy < y < y + \frac{1}{2}dy$$

sont définies respectivement par

$$f_1(x)\,dx \qquad \text{et} \qquad f_2(y)\,dy,$$

où

$$f_1(x) = \varphi_1(x) + \mathrm{A}'_3\varphi'''_1(x) + \mathrm{A}'_4\varphi^{\mathrm{IV}}(x) + \ldots,$$
$$f_2(y) = \varphi_2(y) + \mathrm{A}''_3\varphi'''_2(y) + \mathrm{A}''_4\varphi^{\mathrm{IV}}(y) + \ldots.$$

et

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}}, \qquad \varphi_2(y) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2\sigma_2^2}}.$$

Les deux variables x et y étant supposées indépendantes l'une de l'autre, le théorème des probabilités composées nous apprend que la probabilité, pour que l'on ait simultanément

$$x - \frac{1}{2}dx < x < x + \frac{1}{2}dx \qquad \text{et} \qquad y - \frac{1}{2}dy < y < y + \frac{1}{2}dy,$$

est exprimée par

$$f_1(x)f_2(y)\,dx\,dy.$$

En limitant les fonctions de fréquence à leur premier terme, cette probabilité peut s'écrire

$$(a) \qquad \varphi_1(x)\varphi_2(y)\,dx\,dy = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}-\frac{y^2}{2\sigma_2^2}}\,dx\,dy.$$

Au contraire, si les deux variables x et y ne sont pas indépendantes, Bravais a montré (¹) que la probabilité en question était fournie par la formule

$$(b) \qquad \varphi(x, y)\,dx\,dy = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{xy}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2}\right)}\,dx\,dy.$$

où

$$r = -\frac{c_{11}}{\sqrt{c_{20}c_{02}}}.$$

(¹) *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie royale des Sciences*, p. 268.

De la comparaison des deux formules (a) et (b), on voit que la première se déduit de la seconde en y posant $r = 0$; on a, en effet, dans ce cas

$$\varphi(x, y) = \varphi(x),\ \varphi(y).$$

C'est pour cette raison que l'on a choisi la quantité r comme une mesure de dépendance ou de corrélation entre les séries des valeurs de x et de y, et on l'a appelée *coefficient de corrélation*.

Ses propriétés fondamentales se déduisent facilement d'une proposition démontrée par Poisson. Soient, en effet, ξ, η deux valeurs quelconques de x et y. De ce qui précède il résulte

$$\nu_{11}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int xy\, F(x, y)\, dx\, dy \int_{-\infty}^{+\infty}\int \xi\eta\, F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int\int\int xy\xi\eta\, F(x, y)\, F(\xi, \eta)\, dx\, dy\, d\xi\, d\eta$$

l'on a de même

$$\nu_{20}\nu_{02} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int\int\int x^2\eta^2 F(x, y)\, F(\xi, \eta)\, dx\, dy\, d\xi\, d\eta$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int\int\int \xi^2 y^2 F(x, y)\, F(\xi, \eta)\, dx\, dy\, d\xi\, d\eta.$$

On en déduit, d'abord

$$\nu_{20}\nu_{02} - \nu_{11}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int\int\int (x^2\eta^2 - xy\xi\eta)\, F(x, y)\, F(\xi, \eta)\, dx\, dy\, d\xi\, d\eta,$$

$$\nu_{20}\nu_{02} - \nu_{11}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int\int\int (\xi^2 y^2 - xy\xi\eta)\, F(x, y)\, F(\xi, \eta)\, dx\, dy\, d\xi\, d\eta,$$

puis

$$2(\nu_{20}\nu_{02} - \nu_{11}^2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int\int\int (x\eta - \xi y)^2 F(x, y)\, F(\xi, \eta)\, dx\, dy\, d\xi\, d\eta.$$

Nous voyons par conséquent, que

$$\nu_{20}\nu_{02} - \nu_{11}^2 \geq 0.$$

En d'autres termes, comme on a

$$r = \frac{\nu_{11}}{\sqrt{\nu_{20}\nu_{02}}},$$

il en résulte que

$$|r| \leqq 1,$$

Lorsque $\nu_{20}\nu_{02} = \nu_{11}^2$, $r = 1$ et $x\eta - \xi y = 0$, c'est-à-dire $\frac{x}{y} = \frac{\xi}{\eta}$, les deux variables sont proportionnelles et, à chaque valeur de x, correspond une et une seule valeur de y et invervsement.

Tout ce que l'on vient de dire sur le coefficient de corrélation ne s'applique qu'au cas où la fonction de corrélation $F(x, y)$ se réduit à son premier terme.

Pour la connaissance complète de la fonction de corrélation $F(x, y)$ on est obligé de recourir au calcul des coefficients du troisième et quatrième ordre, au moins. Pour cela, on a à évaluer les intégrales doubles d'une part de la forme

$$\lambda_{r,s} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int x^r y^s \varphi(x, y)\, dx\, dy$$

et d'autre part

$$\nu_{r,s} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int x^r y^s \frac{\partial^{r+s}\varphi(x, y)}{\partial x^r\, \partial y^s}\, dx\, dy.$$

En laissant de côté les détails du calcul, nous nous contentons de donner le tableau des valeurs de ces quantités. On a pour les coefficients du troisième ordre

$$\lambda_{30} = \lambda_{21} = \lambda_{12} = \lambda_{03} = 0,$$

$$A_3 = -\frac{\nu_{30}}{3!}, \qquad A_{21} = -\frac{\nu_{21}}{2!}, \qquad A_{12} = -\frac{\nu_{12}}{2!}, \qquad A_{03} = -\frac{\nu_{03}}{3!}.$$

Et pour les coefficients du quatrième ordre

$$\lambda_{40} = 3\lambda_{20}^2 = 3\sigma_1^4, \qquad A_4 = \frac{1}{4!}(\nu_{40} - 3\sigma_1^4) = \frac{1}{4!}(\nu_{40} - 3\nu_{20}^2),$$

$$\lambda_{31} = 3\lambda_{20}\lambda_{11} = 3\sigma_1^3\sigma^2 r, \qquad A_{31} = \frac{1}{3!}(\nu_{31} - 3r\sigma_1^3\sigma_2) = \frac{1}{3!}(\nu_{31} - 3\nu_{20}\nu_{11}),$$

$$\lambda_{22} = \sigma_1^2\sigma_2^2(1 + 2r^2), \qquad A_{22} = \frac{1}{4}[\nu_{22} - \sigma_1^2\sigma_2^2(1 + 2r^2)]$$

$$= \frac{1}{4}[\nu_{22} - \nu_{20}\nu_{02} - 2\nu_{11}^2),$$

$$\lambda_{13} = 3\lambda_{02}\lambda_{11} = 3\sigma_1\sigma_2^3 r, \qquad A_{13} = \frac{1}{3!}(\nu_{13} - 3r\sigma_1\sigma_2^3) = \frac{1}{3!}(\nu_{13} - 3\nu_{02}\nu_{11})$$

$$\lambda_{04} = 3\lambda_{02}^2 = 3\sigma_2^4, \qquad A_{04} = \frac{1}{4!}(\nu_{04} - 3\sigma_2^4). \qquad = \frac{1}{4!}(\nu_{04} - 3\nu_{02}^2).$$

Pour terminer cet exposé purement théorique de la Théorie des corrélations, il sera de toute utilité d'ajouter quelques considérations pratiques relatives à son importance et son application dans les recherches statistiques.

Sans revenir sur les raisons pour lesquelles le coefficient de corrélation fut adopté comme mesure de parenté de deux groupes d'observations, nous ferons ressortir plutôt sa signification pratique, ainsi que les conclusions que sa connaissance nous permet de tirer.

Il s'agit d'abord de bien définir la nature de la dépendance entre les éléments de deux série que le coefficient de corrélations nous révèle. Nous ne saurons que trop insister sur la différence que l'on doit faire entre les correspondances fonctionnelle et statistique. La première permet d'exprimer, par une formule mathématique, la loi reliant les éléments mêmes de deux phénomènes. Ce n'est pas ce genre de correspondance que la notion du coefficient de corrélation nous permet d'établir. La corrélation statistique implique non pas une coordination entre les données mêmes (exception faite du cas $r = 1$), mais une parenté, plus ou moins intime, des erreurs élémentaires dans les deux ensembles d'observations. Ainsi, ayant deux séries de données, nous constaterons qu'à une valeur déterminée du caractère considéré dans la première correspondent plusieurs valeurs différentes dans la seconde série. Mais ce que nous recherchons c'est de savoir si, et dans quelle mesure, à un élément de la première série se trouve coordonnée une répartition déterminée des éléments de la seconde. Comme mesure du degré de *cette* correspondance on a choisi, comme nous l'avons dit, le coefficient de corrélation.

$r = 0$ signifie l'absence de toute corrélation *statistique* entre les deux phénomènes, mais non forcément aussi celle d'une corrélation fonctionnelle.

La corrélation statistique devient fonctionnelle pour $r = 1$; dans ce cas les données sont liées entre elles par une relation linéaire. Entre ces deux valeurs limites, le coefficient de corrélation, au point de vue statistique, n'a de l'importance que si $r > 0,50$.

En ce qui concerne les détails pour le calcul numérique de r on se reportera à la troisième partie de ce travail. Ici nous ne donnerons qu'un résumé de formules, avec quelques indications générales nécessaires pour ce calcul.

Étant données deux séries de données statistiques x et y, on commencera par le calcul des paramètres b_1, σ_1, b_2, et σ_2 caractérisant chacunes des deux séries et définies par les formules (déjà connues) suivantes :

$$b_1 = \frac{\Sigma x}{n}, \qquad \sigma_1^2 = \frac{\Sigma x^2}{n} - b_1^2; \qquad b_2 = \frac{\Sigma y}{n}, \qquad \sigma_2^2 = \frac{\Sigma y^2}{n} - b_2^2.$$

A l'aide de ces quantités, le coefficient de corrélation est donné par la formule

$$r = \frac{\Sigma(xy)}{\sigma_1 \sigma_2 n} - b_1 b_2.$$

L'erreur moyenne $\varepsilon(r)$ à craindre est donnée par

$$\varepsilon(r) = \frac{1 - r^2}{\sqrt{n}}.$$

Connaissant r nous pouvons aisément résoudre le problème suivant, très important pour l'étude des corrélations. Étant donné un nombre x (y) de la première série, trouver la valeur la plus probable η (ξ) du nombre correspondant de la deuxième série. On démontre que l'on a

$$\eta - M_y = r \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (x - M_x),$$

et

$$\xi - M_x = r \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (y - M_y),$$

M_x et M_y étant les valeurs moyennes des deux séries,

Les droites définies par ces deux équations s'appellent *droites de régression* et leurs coefficients angulaires coefficient de régression.

DEUXIÈME PARTIE.

Équation fondamentale de la statistique stellaire. — Désignons par e et par E les valeurs caractérisant les intensités, apparente et absolue, d'une certaine propriété supposée variable d'un astre à l'autre. En général, c'est fonction, d'une part de la distance r de l'astre à l'observateur, et d'autre part de la quantité E. Donc

$$e = e(r, \mathrm{E})$$

et de même

$$\mathrm{E} = \mathrm{E}(r, e).$$

Soit $\varphi(\mathrm{E})$ la fonction de fréquence de la quantité E, de sorte que $\varphi(\mathrm{E})d\mathrm{E}$ représente la probabilité pour que E soit compris entre $\mathrm{E} - \frac{1}{2}d\mathrm{E}$ et $\mathrm{E} + \frac{1}{2}d\mathrm{E}$. Pour en déduire l'expression de la fréquence des étoiles d'intensité apparente e, comprise entre $e - \frac{1}{2}$ et $de + \frac{1}{2}de$, on procédera de la manière suivante :

Envisageons l'élément de volume $\omega r^2 dr$ découpé par deux sphères concentriques, de rayons respectifs r et $r + dr$, et un cône d'ouverture ω ayant son sommet au centre de la sphère. En désignant par $\mathrm{D}(r)$ la densité, c'est-à-dire le nombre d'étoiles par unité de volume,

$$\omega r^2 \mathrm{D}(r)\, dr$$

est le nombre d'étoiles contenues dans l'élément de volume considéré, et

$$\omega r^2 \mathrm{D}(r)\, \varphi(\mathrm{E})\, d\mathrm{E}\, dr$$

d'entre elles ont la propriété E comprise entre les limites $\mathrm{E} \mp \frac{1}{2}d\mathrm{E}$

Or

$$d\mathrm{E} = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial e}de + \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial r}dr$$

qui se réduit à

$$d\mathrm{E} = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial e}\, de$$

puisque r est constant pour l'élément de volume considéré; le nombre d'étoiles situées à une distance $r \mp \frac{1}{2} dr$, pour lesquelles e est compris entre $e \mp \frac{1}{2} de$ s'exprime par

$$r^2 \omega \, \mathrm{D}(r) \varphi(\mathrm{E}) \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial e}\, de\, dr.$$

On en déduit que le nombre total $a(e)de$ d'étoiles contenues dans le cône considéré est

$$a(e)\, de = \omega\, de \int_0^\infty r^2 \mathrm{D}(r) \varphi(\mathrm{E}) \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial e}\, dr$$

ou

$$a(e) = \omega \int_0^\infty r^2 \mathrm{D}(r) \varphi(\mathrm{E}) \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial e}\, dr. \tag{I}$$

Cette expression est appelée *équation fondamentale* de la statistique stellaire.

Sa généralisation pour un nombre quelconque de variables est immédiate. Soient, en effet, E_1 et E_2 deux propriétés à étudier. $\varphi(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2) d\mathrm{E}_1 d\mathrm{E}_2$ sera la probabilité pour que ces deux quantités soient comprises simultanément entre les limites $\mathrm{E}_1 \mp \frac{1}{2} d\mathrm{E}_1$, $\mathrm{E}_2 \mp \frac{1}{2} d\mathrm{E}_2$. Le nombre total, $a(e_1, e_2)\, de_1, de_2$ d'étoiles du cône, comprises dans les limites respectives $e_1 \mp \frac{1}{2} de_1$, $e_2 \mp \frac{1}{2} de_2$ est fourni par

$$a(e_1, e_2) = \omega \int_0^\infty r^2 \mathrm{D}(r) \varphi(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2) \frac{\partial \mathrm{E}_1}{\partial e_1} \frac{\partial \mathrm{E}_2}{\partial e_2}\, dr.$$

Connaissant la quantité d'étoiles à la distance r, on a immédiatement la distance moyenne $\pi(e)$ d'un astre répondant au caractère $e \mp \frac{1}{2} de$

$$\pi(e) = \int_0^\infty r^3 \mathrm{D}(r) \varphi(\mathrm{E}) \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial e}\, dr : \int_0^\infty r^2 \mathrm{D}(r) \varphi(\mathrm{E}) \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial e}\, dr$$

ce que l'on peut écrire

$$(\mathrm{II}) \qquad \pi(e)\,a(e) = \omega \int_0^\infty r^3\,\mathrm{D}(r)\,\varphi(\mathrm{E})\,\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial e}\,dr.$$

Comme application de ces formules, nous allons déduire les expressions permettant d'évaluer le nombre total et la distance moyenne des astres :

1° de grandeur apparente m;

2° de mouvement propre apparent p.

1° Soient $\mathrm{E} = \mathrm{H}$ et $e = h$ les éclats, absolu et apparent, d'un astre situé à la distance r. On a

$$\mathrm{H} = h r^2,$$
$$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial e} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial h} = r^2.$$

La substitution dans les formules (I) et (II) donne

$$a(h) = \omega \int_0^\infty r^4\,\mathrm{D}(r)\,\varphi(hr^2)\,dr,$$
$$\pi(h)\,a(h) = \omega \int_0^\infty r^5\,\mathrm{D}(r)\,\varphi(hr^2)\,dr.$$

Si l'on veut introduire, à la place des éclats H, h, les grandeurs correspondantes **M** et m, il suffira de tenir compte des relations

$$\log \mathrm{H} = -0{,}4\,\mathrm{M} \qquad \text{et} \qquad \log h = -0{,}4\,m.$$

En portant ces valeurs dans l'équation

$$\log \mathrm{H} = \log h + 2 \log r,$$

on trouve

$$\mathrm{M} = m - 5 \log r$$

la constante arbitraire ayant été choisie de manière à avoir $\mathrm{M} = m$ pour $r = 1$.

Ainsi, les formules cherchées pour le nombre d'étoile de grandeur m et leur distance moyenne deviennent

$$a(m) = \omega \int_0^\infty r^2\,\mathrm{D}(r)\,\varphi_0(m - 5 \log r)\,dr,$$
$$\pi(m)\,a(m) = \omega \int_0^\infty r^3\,\mathrm{D}(r)\,\varphi_0(m - 5 \log r)\,dr.$$

Il est avantageux pour ce qui suit de transformer un peu ces expressions.

Posons

$$r = e^{-by}, \qquad \text{où} \qquad b = 0,2 \log nat\, 10 = 0,46052;$$

il vient

$$a(m) = \omega \int_{-\infty}^{+\infty} b\, e^{-3by} \mathrm{D}(e^{-by})\, \varphi_0(m+y)\, dy,$$

$$\pi(m)\, a(m) = \omega \int_{-\infty}^{+\infty} b\, e^{-4by} \mathrm{D}(e^{-by})\, \varphi_0(m+y)\, dy,$$

que l'on peut écrire aussi

$$a(m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_0(y)\, \varphi_0(m+y)\, dy,$$

$$\pi(m)\, a(m) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-by} \Delta_0(y)\, \varphi_0(m+y)\, dy,$$

si l'on pose

$$\Delta_0(y) = \omega\, b\, \mathrm{D}(e^{-by})\, e^{-3by}.$$

2° On aura, de même, pour le nombre total $a(p)\,dp$ et la distance moyenne $\pi(p)$ des astres de mouvements propres absolu (E = P) et apparent ($e = p$) en tenant compte de $\mathrm{P} = pr$

$$a(p) = \omega \int_0^{\infty} r^3\, \mathrm{D}(r)\, \varphi_1(pr)\, dr,$$

$$\pi(p)\, a(p) = \omega \int_0^{\infty} r^4\, \mathrm{D}(r)\, \varphi_1(pr)\, dr.$$

Afin de rendre les formules plus homogènes, introduisons les logarithmes à la place des nombres. Soient, en effet

$$\mathrm{P} = e^{\mathrm{Z}} \qquad \text{et} \qquad p = e^{z}.$$

de sorte que $\varphi_1(\mathrm{Z}) = \varphi_1(z + \log nat\, r)$. En posant $r = e^{\rho}$, les expressions fournissant le nombre et la distance moyenne des astres de mouvement apparent $p \mp \frac{1}{2}\, dp$ deviennent

$$a(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(\rho)\, \varphi_1(z+\rho)\, d\rho,$$

$$\pi(z)\, a(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\rho} \Delta(\rho)\, \varphi_1(z+\rho)\, d\rho,$$

où

$$\Delta(\rho) = \omega\, e^{3\rho} \mathrm{D}(e^{\rho}).$$

De ce qui précède, il résulte que, pour étudier une propriété x par les méthodes de statistique stellaire, on est conduit à chercher la solution de deux équations de la forme

$$a(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(\rho)\,\Phi(x+\rho)\,d\rho,$$

$$b(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\rho}\Delta(\rho)\,\Phi(x+\rho)\,d\rho.$$

A l'aide de ces équations on peut, des quatre fonctions $a(x)$, $b(x)$, $\Delta(\rho)$ et $\Phi(x+\rho)$, en déterminer deux, si l'on connaît les deux autres. Schwarzschild a résolu (1) les deux problèmes suivants :

1° Connaissant les fonctions $a(x)$ et $\Phi(x+\rho)$, déduire $\Delta(\rho)$ de la première;

2° Connaissant les fonctions $a(x)$ et $b(x)$, définir $\Delta(\rho)$ et $\Phi(x+\rho)$.

Les solutions sont basées sur le théorème de l'intégrale de Fourier que l'on peut énoncer ainsi :

$$f(x) = \int_0^{\infty} [\mathrm{A}(\omega)\cos\omega x + \mathrm{B}(\omega)\sin\omega x]\,d\omega$$

où

$$\mathrm{A}(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\omega x\,dx,$$

$$\mathrm{B}(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\omega x\,dx.$$

Si l'on pose

$$\frac{\mathrm{A}(\omega) - i\mathrm{B}(\omega)}{2} = \varphi(\omega),$$

$$\frac{\mathrm{A}(\omega) + i\mathrm{B}(\omega)}{2} = \varphi(-\omega),$$

l'intégrale de Fourier prendra la forme

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega)\,e^{-i\omega x}\,d\omega, \qquad \varphi(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{i\omega x}\,dx,$$

Charlier appelle $\varphi(\omega)$ la fonction de Fourier conjuguée de $f(x)$ et

(1) *A. N.*, t. 185, p. 81-88.

la désigne par $f^{-1}(\omega)$. En adoptant sa notation, ce théorème peut s'écrire (à un facteur constant près)

$$f^{-1}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{x\omega i}\, dx,$$

$$f(x) \quad = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f^{-1}(\omega)\, e^{-x\omega i}\, d\omega.$$

Revenons maintenant aux problèmes traités par Schwarzschild.

1° En intégrant les deux membres de la première équation après les avoir multipliés par $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{x\omega i}\, dx$, on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} a(x)\, e^{x\omega i}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \Lambda(\varrho)\, \Phi(x+\varrho)\, e^{x\omega i}\, d\varrho\, dx$$

ce que l'on peut encore écrire

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} a(x)\, e^{x\omega i}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(\rho)\, e^{-\rho\omega i}\, d\rho \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x+\rho)\, e^{(x+\rho)\omega i}\, dx.$$

Comme la deuxième intégrale du second membre est indépendante de ρ, on a, d'après le théorème précédent

$$a^{-1}(\omega) = \sqrt{2\pi}\, \Delta^{-1}(-\omega)\, \Phi^{-1}(\omega)$$

et aussi

$$a^{-1}(-\omega) = \sqrt{2\pi}\, \Delta^{-1}(\omega)\, \Phi^{-1}(-\omega).$$

Or, de la seconde équation de l'intégrale de Fourier, on déduit

$$\Delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^{-1}(\omega)\, e^{-x\omega i}\, d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^{-1}(-\omega)\, e^{x\omega i}\, d\omega,$$

d'où l'expression cherchée

$$\Delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^{-1}(\omega)}{\Phi^{-1}(\omega)}\, e^{x\omega i}\, d\omega.$$

2° Multiplions, de même, les deux membres de l'équation

en $b(x)$ par $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{x\omega i}\,dx$, puis intégrons, on trouve

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} b(x)\, e^{x\omega i}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(\rho)\, e^{-\rho\omega i + \rho}\, d\rho \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x+\rho)\, e^{(x+\rho)\omega i}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(\rho)\, e^{-(\omega+i)\rho}\, d\rho \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)\, e^{x\omega i}\, dx.
\end{aligned}$$

Si l'on admet que la définition de la fonction conjuguée est généralisable pour les valeurs imaginaires de l'argument, on déduit de la dernière équation

$$b^{-1}(\omega) = \sqrt{2\pi}\, \Delta^{-1}[-(\omega + i)]\, \Phi^{-1}(\omega)$$

ou

$$b^{-1}(-\omega) = \sqrt{2\pi}\, \Delta^{-1}(\omega - i)\, \Phi^{-1}(-\omega).$$

De sorte qu'en divisant l'équation correspondante du problème précédent par celle-ci, on trouve

$$\frac{\Delta^{-1}(\omega)}{\Delta^{-1}(\omega - i)} = \frac{a^{-1}(-\omega)}{b^{-1}(-\omega)}.$$

Enfin, si l'on pose

$$\omega = yi$$

on en déduit, en introduisant deux fonctions auxiliaires $p(y)$ et $q(y)$ définies à l'aide des expressions

$$e^{p(y)} = \Delta^{-1}(yi), \qquad e^{q(y)} = \frac{a^{-1}(-yi)}{b^{-1}(-yi)},$$
$$p(y) - p(y - i) = q(y).$$

Connaissant $p(y)$, on déterminera $\Delta^{-1}(yi)$, par conséquent, aussi $\Delta(x)$; puis, au moyen de

$$\Phi^{-1}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{a^{-1}(\omega)}{\Delta^{-1}(\omega)},$$

on aura $\Phi^{-1}(\omega)$ et, enfin, à l'aide de l'intégrale de Fourier, $\Phi(x)$.

En résumé, on voit que le problème fondamental de la statistique stellaire, relatif à une propriété x, donne lieu à deux équations intégrales de la forme de $a(x)$ et $b(x)$. La première fournit le nombre, la seconde la distance moyenne des astres ayant cette propriété à un degré x d'intensité. Ces équations comportent

quatre fonctions : $a(x)$, $b(x)$, $\Phi x + \rho)$ et $\Delta(\rho)$, dont on déterminera deux si l'on connaît les deux autres, comme on vient de le montrer. Par conséquent, si l'on pouvait admettre comme connus le nombre et la distance moyenne des étoiles, par exemple, d'une certaine grandeur x, on en déduirait leur fonction de fréquence $\Phi(x)$ et la densité Δ. En réalité, nos connaissances relatives à ces fonctions, quelle que soit la propriété x, sont fort incomplètes et incertaines, $D(r)$, en particulier, est tout à fait inconnu.

Au point de vue statistique, néanmoins, $a(x)$ peut être considéré comme assez bien connu. Pour avoir une deuxième connue du problème, on a trouvé préférable d'adopter, à la place de $b(x)$, pour la fonction $\Phi(x)$ une forme hypothétique vraisemblable dont la légitimité pourra être vérifiée à *posteriori* en comparant les résultats déduits avec les observations.

Comme application de ces procédés, nous allons étudier deux problèmes en particulier, le problème des grandeurs stellaires et celui de leurs mouvements propres.

Équation fondamentale dans l'étude des grandeurs. — I. Examinons d'abord les hypothèses les plus simples qui consistent à admettre : 1° Que le nombre d'étoiles par unité de volume est le même pour tout le ciel; 2° qu'elles ont toutes la même intensité absolue.

En d'autres termes on suppose

$$D(r) = \text{const.}, \qquad H = hr^2 = \text{const.}$$

En prenant les dérivées logarithmiques des deux membres, la deuxième équation donne

$$\frac{dh}{h} + 2\frac{dr}{r} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad dr = -\frac{r}{2h}\,dh.$$

Or, d'après ce qui précède, l'élément de volume situé à la distance r contient

$$D(r)\omega r^2\,dr$$

astres, dont

$$a(h)\,d(h) = -\frac{1}{2}\omega D(r)\,\frac{H^{\frac{3}{2}}}{h^{\frac{5}{2}}}\,dh$$

ont l'éclat apparent $h \mp \frac{1}{2}\,dh$. Par conséquent, on aura, pour le

nombre total A (h) d'astres d'éclat apparent plus grand que h

$$A(h) = \int_{\infty}^{h} a(h)\,dh = -\frac{1}{2}\omega D(r) H^{\frac{3}{2}} \int_{\infty}^{h} h^{-\frac{5}{2}}\,dh = \frac{1}{3}\omega D(r)\left(\frac{H}{h}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Pour deux éclats quelconques h_1 et h_2, on a

$$A(h_1) : A(h_2) = h_2^{\frac{3}{2}} : h_1^{\frac{3}{2}}.$$

En passant des éclats aux grandeurs, au moyen de la formule

$$\log\frac{h_1}{h_2} = -0,4(m_1 - m_2),$$

il vient

$$A(m_1) : A(m_2) = 10^{0,6(m_1 - m_2)}.$$

Pour $m_1 - m_2 = 1$, on retrouve la relation bien connue

$$A(m) : A(m-1) = 10^{0,6} = 3,98\,(=)\,4 \quad (^1),$$

c'est-à-dire, pendant que la grandeur apparente croît en progression arithmétique suivant les entiers, le nombre d'astres correspondants augmente en progression géométrique de raison 4.

Il reste à calculer le nombre d'étoiles d'une grandeur déterminée m. Or, on a

$$h = C.10^{-0,4m} = C\,e^{-0,9210m},$$
$$dh = -0,9210\,C\,e^{-0,9210m}\,dm.$$

En substituant ces nombres dans la formule de $a(h)d(h)$, on trouve

$$a(m)\,dm = -\frac{1}{2}D(r)\omega H^{\frac{3}{2}} h^{-\frac{5}{2}}\,dh = 0,4605\,D(r)\omega H^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2}\times 0,9210m}\,dm$$
$$= C_1\,e^{1,3815m}\,dm.$$

Ceci intégré d'une part entre les limites $m - \frac{1}{2}$ et $m + \frac{1}{2}$ et d'autre part entre $m = -\infty$ et m donne respectivement

$$a_m = C_2\,e^{1,3815m} \qquad \text{et} \qquad A_m = C_3\,e^{1,3815m}.$$

Telles sont les expressions permettant d'évaluer d'une part le nombre d'étoiles d'une grandeur apparente donnée m et d'autre part le nombre total d'astres plus brillants que m.

---

(1) (=) lire : « égale approximativement ».

Jusqu'à quel point les résultats ainsi obtenus se trouvent confirmés par les observations, le tableau I le montre.

TABLEAU I

m	a_m	A_m	$a_m : a_{m-1}$	$A_m : A_{m-1}$
1.....	9	9		
2.....	30	39	3,33	4,33
3.....	75	114	2,50	2,92
4.....	190	304	2,53	2,67
5.....	630	934	3,32	3,07
6.....	1949	2883	3,10	3,09
7.....	8335	11218	4,27	3,89
8.....	27241	38459	3,27	3,43
9.....	165190	203649	6,07	5,30

Les écarts que l'on constate entre les nombres observés et calculés proviennent en partie de l'incertitude dans l'appréciation des grandeurs stellaires, mais surtout de l'inexactitude des hypothèses $H = \text{const.}$ et $D(r) = \text{const.}$ Rien n'indique *a priori* qu'il existe nécessairement une relation entre la grandeur d'une étoile et sa distance à l'observateur.

Sans insister davantage sur ces considérations, nous citons l'hypothèse de Seeliger relative à la forme de la fonction de densité, définie par

$$D(r) = \gamma r^{-s}.$$

Elle donne pour $a(m)$ la valeur

$$a(m) = C e^{\nu m}, \qquad \nu = 0,46054(3 - s).$$

II. Reprenons l'équation fondamentale (1) en l'écrivant

$$a(m) = \omega \int_0^\infty r^2 D(r) \varphi(m - 5 \log r) \, dr.$$

Elle permet de déterminer l'une des trois fonctions $a(m)$, $D(r)$, $\varphi(M)$ en fonctions des deux autres. $D(r)$ est, comme on vient de le dire, tout à fait inconnu; quant aux deux autres, il semble possible, en particulier pour $a(m)$, de les définir statistiquement avec une approximation relativement assez grande. Des travaux récents de Kapteyn, il résulte que les fonctions $a(m)$ et $\varphi(M)$, supposées

de la forme des fonctions du type A, représentent suffisamment bien les conditions générales de la Voie lactée.

Soient alors

$$a(m) = c\,e^{-\frac{(m-m_0)^2}{2k^2}} \qquad \text{et} \qquad \varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{C}\,e^{-\frac{(\mathrm{M}-\mathrm{M}_0)^2}{2\mathrm{K}^2}}.$$

Si l'on intègre les deux membres de la première équation après les avoir multipliés par $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{m\omega i}\,dm$, on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} a(m)\,e^{m\omega i}\,dm = a^{-1}(\omega) = \frac{c}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(m-m_0)^2}{2k^2}}\,e^{m\omega i}\,dm$$

$$= \frac{c}{\sqrt{2\pi}}\,e^{m_0\omega i}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2k^2}}\,e^{x\omega i}\,dx$$

$$= \frac{c}{\sqrt{2\pi}}\,e^{m_0\omega i}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2k^2}}\cos\omega x\,dx$$

$$= \frac{c}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi k^2}\,e^{-\frac{\omega^2 k^2}{2}}$$

de telle sorte que

$$a^{-1}(\omega) = ck\,e^{-\frac{\omega^2 k^2}{2} + m_0\omega i}.$$

On déduira de la même manière

$$\Phi^{-1}(\omega) = \mathrm{CK}\,e^{-\frac{\omega^2\mathrm{K}^2}{2} + \mathrm{M}_0\omega i}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'expression

$$\Delta^{-1}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{a^{-1}(-\omega)}{\Phi^{-1}(-\omega)},$$

il vient

$$\Delta^{-1}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{ck}{\mathrm{CK}}\,e^{-\frac{\omega^2}{2}(k^2-\mathrm{K}^2) - \omega(m_0-\mathrm{M}_0)i}$$

Enfin, en appliquant la première formule de l'intégrale de Fourier, on obtient

$$\Delta(y) = \mathrm{C}_1\,e^{-\frac{[y-(\mathrm{M}_0-m_0)]^2}{2(k^2-\mathrm{K}^2)}}, \qquad \mathrm{C}_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{ck}{\mathrm{CK}}\,\frac{1}{\sqrt{k^2-\mathrm{K}^2}}.$$

Et l'expression pour la densité devient

$$\mathrm{D}(e^{-by}) = \mathrm{C}_2\,e^{-\frac{[y-(\mathrm{M}_0-m_0)]^2}{2(k^2-\mathrm{K}^2)} + 3by}.$$

Il en résulte immédiatement que le maximum de la densité a lieu pour

$$y = M_0 - m_0 + 3b(k^2 - K^2).$$

Les recherches qui ont conduit Kapteyn aux résultats que l'on résumera ici, mais sur lesquelles on ne peut pas insister plus longuement, se trouvent exposées dans le A. J. 566.

D'après cet astronome, la fonction de fréquence $\varphi_0(M)$ des grandeurs absolues a la forme

$$\varphi_0(M) = \frac{C}{H}\, e^{-0,385(\log H - 1,400)^2}.$$

En adoptant comme unité d'intensité lumineuse celle du Soleil et en admettant en outre qu'à l'unité de distance ($\pi = 0'',1$) sa grandeur est de $5^m,5$, on transformera facilement cette équation en

$$\varphi_0(M) = C_1 e^{2bM - 0,16\times 0,385(2,0-M)^2}.$$

La valeur maxima de l'exposant ayant lieu lorsque

$$2b + 0,32 \times 0,385(2 - M) = 0,$$

il résulte que la grandeur moyenne des astres à l'unité de distance est

$$M(=)9^m,5.$$

En identifiant les seconds membres de la fonction $\varphi_0(M)$ de Kapteyn avec $\Phi(M)$, présenté sous forme d'une fonction du type A, on déduit pour le coefficient de dispersion

$$K^2 = \frac{1}{2 \times 0,16 \times 0,385} = 8,12,$$
$$K = 2^m,85,$$

de telle sorte que l'on a

$$\Phi_0(M) = Ce^{-\frac{(M-9,5)^2}{2(2,85)^2}}.$$

Ainsi, les deux tiers du nombre total des étoiles auraient leur grandeur comprise entre

$$9^m,5 - 2^m,8 = 6^m,7 \qquad \text{et} \qquad 9^m,5 + 2^m,8 = 12^m,3.$$

Pour le nombre $a\,(m)$, Kapteyn et Schwazshild ont trouvé qu'il

pouvait s'exprimer par

$$\log a(m) = 0,596 + 0,5612\,m - 0,0055\,m^2.$$

Le maximum de $a(m)$ aurait donc lieu pour

$$0,0111\,m = 0,5612,$$

c'est-à-dire

$$m = 51^m,0.$$

Autrement dit, le nombre d'étoiles irait en augmentant jusqu'à la grandeur $51^m,0$ et leur nombre total, d'après la même formule, serait de 497.10^{11}!

Mise sous la forme d'une fonction de fréquence du type A, l'expression de $a(m)$ devient

$$a(m) = ce^{-\frac{(m-51,0)^2}{2k^2}} \qquad k = 6^m,3 \qquad (k^2 = 39,50).$$

Connaissant ainsi $a(m)$ et $\Phi_0(M)$ on peut, d'après ce qui a été dit précédemment, déduire l'expression pour la fonction de densité. On a trouvé, en effet, que

$$\Delta(y) = C_1 e^{-\frac{[y-(M_0-m_0)]^2}{2(k^2-K^2)}}.$$

En y substituant les nombres calculés ci-dessus, on a

$$\Delta(y) = C_1 e^{-\frac{(y+41,5)^2}{2(5,6)^2}}.$$

De là, il est facile de déduire une formule analogue pour la fonction $D(e^{-by})$. Elle aura le même coefficient de dispersion $5^m,60$ et une valeur moyenne y_0 de y définie par

$$y_0 = 9,5 - 51,0 + 3b(5,60)^2 = 1,83.$$

Comme on avait posé $r = e^{-by}$, on aura pour la distance r_0 à laquelle correspond la densité maxima,

$$r_0 = e^{-by_0} = 0,4306 \qquad \text{ou} \qquad \pi = \frac{1}{10r_0} = 0'',23.$$

Les expressions $a(m)$ et $\Phi_0(M)$ de Kapteyn peuvent servir également pour tirer des conclusions ayant trait aux distances moyennes des astres. Mais la place nous manque pour développer davantage cette question.

Il convient cependant d'ajouter ici une remarque. La vraisemblance des nombres fournis par les formules précédentes doit paraître d'autant plus douteuse que la méthode même de Kapteyn présente deux points faibles : l'insuffisance de données statistiques d'une part, et le fait d'avoir, malgré cela, traité le problème très sommairement d'autre part.

III. Si l'on envisage l'équation fondamentale généralisée il est possible de démontrer que :

La valeur moyenne de la parallaxe des astres d'une grandeur apparente m est égale au produit de la valeur moyenne de leur mouvement propre par un facteur constant (dans un même carré tout au moins). Exprimée sous sa forme mathématique, la proposition s'écrit

$$\mathrm{M}_m(\pi) = \mathrm{M}_m(p) \times \frac{1}{\mathrm{M}(\mathrm{P})}.$$

Soient $\varphi_0(\mathrm{M})$ et $\varphi_1(\mathrm{P})$ les fonctions de fréquence des grandeurs absolues M et des mouvements absolus projetés sur un plan perpendiculaire à la ligne de visée. On admet en outre que la vitesse absolue est indépendante de la distance r.

Si l'on pose

$$\Psi = \omega r^3 \mathrm{D}(r) \varphi_0(\mathrm{M}) \varphi_1(\mathrm{P}),$$

$\Psi\, dm\, dr\, dp$ exprime, d'après la formule généralisée de l'équation fondamentale, le nombre d'étoiles de grandeur m situées à la distance r, et de mouvement propre p, contenues dans l'élément de volume ω.

Pour une certaine grandeur apparente $m \mp \frac{1}{2}\, dm$, la valeur moyenne de p est

$$\mathrm{M}_m(p) = \int_0^\infty \int_0^\infty p \Psi\, dr\, dp : \int_0^\infty \int_0^\infty \Psi\, dr\, dp.$$

Or, on suppose que P projection du mouvement absolu ne dépend pas de r, par conséquent les doubles intégrations dans le second membre peuvent être remplacées par les produits de deux intégra-

tions simples. On a ainsi

$$M_m(p) = \int_0^\infty pr^2 \varphi_1(pr)\, dp \int_0^\infty \omega r D(r) \varphi_0(M)\, dr$$
$$: \int_0^\infty r \varphi_1(pr)\, dp \int_0^\infty \omega r^2 D(r) \varphi_0(M)\, dr,$$

d'où, en posant

$$M(P) = \int_0^\infty p r^2 \varphi_1(pr)\, dp : \int_0^\infty r \varphi_1(pr)\, dp,$$
$$M_m(p) = M(P) \int_0^\infty \omega r D(r) \varphi_0(M)\, dr : \int_0^\infty \omega r^2 D(r) \varphi_0(M)\, dr.$$

Enfin, en introduisant les parallaxes $\pi = \frac{1}{r}$, à la place des distances, cette expression devient

$$M_m(p) = M(P) \int_0^\infty \pi\omega D\varphi_0\, d\pi : \int_0^\infty \omega D\varphi_0\, d\pi,$$

ou

$$M_m(p) = M(P) M_m(\pi), \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Sans même connaître la fonction de fréquence $\varphi_0(M)$, il est donc possible de résoudre le problème fondamental de la statistique stellaire en utilisant la valeur moyenne des parallaxes déduite des mouvements propres.

Reprenons maintenant les formules

$$a(m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_0(y) \varphi_0(m+y)\, dy,$$
$$a(m) M_m(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-by} \Delta_0(y) \varphi_0(m+y)\, dy,$$
$$\Delta_0(y) = \omega b D(e^{-by}) e^{-3by} = \omega b D(r) r^3.$$

La relation précédente permet d'écrire

$$a(m) M_m(\pi) = a(m) M_m(p) \frac{1}{M(P)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{by} \Delta_0(y) \varphi_0(m+y)\, dy,$$

ou

$$a(m) M_m(p) = M(P) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{by} \Delta_0(y) \varphi_0(m+y)\, dy.$$

Actuellement, les quantités $a(m)$ et $M_m(p)$ peuvent être consi-

dérées comme assez bien connues, la première jusqu'à $m = 9^m, 5$, la deuxième jusqu'à $6^m, 5$. Par conséquent, en vertu de la solution de Schwarzschild, on en déduira les fonctions Δ_0 et φ_0.

Mais on peut aussi envisager la question un peu différemment. Supposons que les fonctions $a(m)$ et $M_m(p)$, définies par

$$a(m) = \frac{C_1}{k\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(m-m_0)^2}{2k^2}}, \qquad M_m(p) = K_2 e^{-\lambda m},$$

représentent réellement les observations.

Rien ne s'oppose, pour le moment, à ce que nous admettions que les expressions encore inconnues de Δ_0 et φ_0 soient également de la forme des fonctions du type A ; posons alors

$$\Delta_0(y) = \frac{C}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-m_1)^2}{2\sigma_1^2}} \quad \text{et} \quad \varphi_0(m+y) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[y-(m_2-m)]^2}{2\sigma_2^2}}.$$

En substituant dans $a(m)$ et $a(m)\,M_m(p)$ on déduit, moyennant la formule bien connue

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-px^2-qx}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{p}}\, e^{-\frac{q^2}{4p}},$$

et après quelques réductions très faciles

$$a(m) = \frac{C}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} e^{-\frac{[m-(m_2-m_1)]^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}},$$

$$M_m(p) = M(P) e^{b\frac{m_1\sigma_2^2+(m_2-m_1)\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}+b^2\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}.$$

En égalant les seconds membres des deux formes de $a(m)$ et $M_m(p)$, on trouve pour les paramètres de Δ_0 et φ_0

$$\sigma_1^2+\sigma_2^2 = k^2, \qquad b\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} = \lambda = b\lambda_1$$

d'où

$$\sigma_1^2 = \lambda_1 k^2, \qquad \sigma_2^2 = k^2(1-\lambda_1);$$

$$m_2 - m_1 = m_0;$$

$$K_2 = M(P) e^{b\frac{m_1\sigma_2^2+m_2^2\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}+b^2\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}, \qquad C = C_1,$$

ce qui fait connaître les fonctions de Δ_0 et φ_0, sans même avoir besoin de recourir aux solutions des équations intégrales. Il con-

vient cependant de bien faire remarquer que cette conclusion n'est légitime que si l'on s'est assuré préalablement que les expressions $a(m)$ et $M_m(p)$ avaient bien la forme des fonctions de fréquence définies précédemment.

Par conséquent, pour tirer tout le parti des considérations théoriques précédentes on doit : 1° vérifier si en effet les formules

$$a(m) = \frac{C}{k\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(m-m_0)^2}{2k^2}} \qquad \text{et} \qquad M_m(p) = K_2 e^{-\lambda m}$$

représentent les données d'observations relatives aux grandeurs et mouvements propres moyens des astres;

2° Si oui, déterminer alors les fonctions de densité $D(r)$ et de fréquence des grandeurs absolues $\varphi_0(M)$, ce qui permettra de se faire une idée approchée sur la constitution actuelle de la Voie lactée.

Avant de passer aux applications numériques nous allons montrer comment on peut calculer effectivement les trois paramètres N, k, m de la fonction

$$a(m) = \frac{N}{k\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(m-m_0)^2}{2K^2}}.$$

On a établi précédemment que le nombre total d'astres plus brillants que m était donné par

$$A(m) = \int_{-\infty}^{m} a(m)\,dm = \frac{N}{k\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{m} e^{-\frac{(m-m_0)^2}{2k^2}} dm.$$

En effectuant le changement de variables

$$m - m_0 = kx$$

il vient

$$A(m) = \frac{N}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{m-m_0}{k}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Si l'on introduit la notation

$$P(x) = u = \frac{N}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

l'expression précédente peut s'écrire

$$A(m) = \frac{N}{2}\left[1 - P\left(\frac{m_0 - m}{k}\right)\right],$$

ou, en posant

$$\frac{m_0}{k} = x \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{k} = y,$$

$$P(x - my) = 1 - \frac{2A(m)}{N}.$$

Si l'on envisage maintenant la fonction inverse de $P(x)$, pour laquelle Charlier adopte la notation $x = Errf(u)$(1), en l'appliquant au cas actuel, la dernière équation donne

$$x - my = Errf\left[1 - \frac{2A(m)}{N}\right].$$

Le calcul des paramètres N, k, m_0 se trouve ainsi réduit à la résolution d'un système de trois équations de cette forme, à savoir $x - m_1 y$, $x - m_2 y$ et $x - m_3 y$.

Pour illustrer les hypothèses précédemment admises, de même que pour montrer jusqu'à quel degré les observations confirment les conclusions tirées de l'équation fondamentale de la statistique stellaire, on va appliquer, avec M. Charlier, ces procédés à la discussion des données relatives à certaines parties du ciel.

Au préalable, nous allons donner une esquisse de l'aspect du ciel tel que M. Charlier l'envisage dans ses recherches de statistique stellaire.

L'Univers sidéral est considéré comme un ensemble de corps remplissant une sphère dont le plan fondamental, ou de référence, est celui de la Voie lactée. La position est définie à l'aide des coordonnées de son pôle situé par $\mathcal{R} = 12^h 40^m = 190°$ et $\mathcal{D} = +28°$ (dans la constellation de l'Aigle).

On peut donc, en choisissant comme origine le nœud ascendant de ce plan rapporté au plan de l'équateur, définir la position de chaque astre par la longitude et la latitude galactiques.

Cependant, au point de vue statistique, M. Charlier a préféré diviser le ciel entier en 48 parties, appelés *carrés célestes*, toutes de même surface (860° carrés), désignées par des lettres et des indices de A_1 (pôle nord galactique) à F_2 (pôle sud galactique).. La figure 8 ci-après, qui est la projection de Flamsteed d'une

(1) On trouvera une table des valeurs de cette fonction, calculée par Åkesson, dans *ML*, II, n°8 , p. 34.

sphère, facilitera notablement la représentation de cette division.

L'étude du ciel par des procédés statistiques consiste alors à rassembler, pour chaque carré, le plus grand nombre possible de renseignements relatifs aux propriétés des astres telles que éclat, mouvement propre apparent, distance, spectre. Les résultats partiels déduits des discussions de ces groupes de données constituent les préliminaires pour l'étude générale des propriétés choisies.

Revenons maintenant aux applications des raisonnements exposés précédemment. Pour cela, on va considérer les données relatives aux deux carrés célestes C_4 et C_7. Etudions d'abord la fréquence des grandeurs. Les éléments statistiques correspondant ont été tirés d'une part du Catalogue BD (Tableau), et d'autre part du *Catalogue photographique de la Carte du Ciel* (C. d. C.).

m.	C_7.	C_4.
1,0 — 1,9	0	2
2,0 — 2,9	0	1
3,0 — 3,9	5	7
4,0 — 4,9	8	9
5,0 — 5,9	39	37
6,0 — 6,9	117	155
7,0 — 7,9	331	605
8,0 — 8,9	1473	3391
9,0	562	1594
9,1	306	854
9,2	448	1525
9,3	862	2409
9,4	521	2254
9,5	2625	8429
Variables	1	7
Nébuleuses	16	1
S.	7314	21280

Quant au dénombrement des astres contenus dans la *C. d. C.*, comme M. Charlier ne disposait que de 87 clichés pour C_7 et 61 pour C_4, il a employé l'artifice suivant. A l'aide du matériel disponible, il a cherché d'abord les nombres moyens pour un cliché de chacun des deux carrés, et il a trouvé

$$n = 404{,}45 \text{ pour } C_7 \qquad \text{et} \qquad n = 3915{,}50 \text{ pour } C_4.$$

Or, chaque carré a 859,44° carrés de surface; d'autre part, un

cliché de la carte photographique couvre $130' \times 130' = 4{,}6945°$ carrés. De sorte que le nombre d'étoiles par degré carré est de

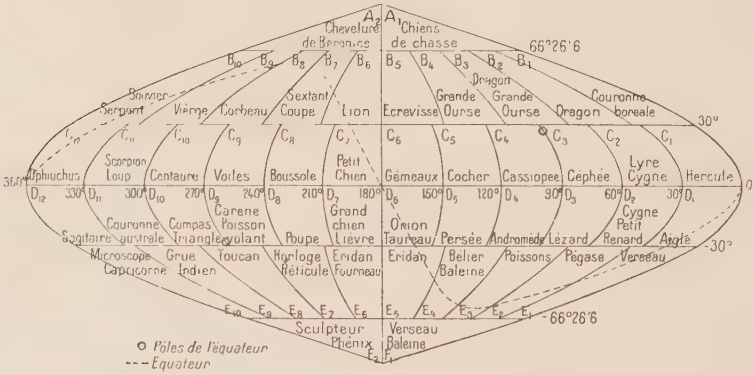
$$86{,}155 \text{ pour } C_7 \quad \text{et} \quad 834{,}072 \text{ pour } C_4,$$

et dans le carré entier on a

$$74045 \text{ astres pour } C_7 \quad \text{et} \quad 716832 \text{ pour } C_4.$$

Afin de rendre homogène l'ensemble de données utilisées dans la discussion, il a fallu d'abord rapporter les grandeurs de BD à une échelle photométrique plus précise. On a choisi, pour cela, l'échelle de HD (Harvard Durchmusterung). En plus, pour la *C. d. C.*, on a dû fixer la grandeur limite. D'après les calculs de M. Charlier cette limite est $13^m,89 \pm 0^m,17$.

Fig. 8.



On peut alors aborder les divers problèmes dont il a été précédemment question.

1° Calcul du nombre d'étoiles de grandeur apparente m. Pour définir $A(m)$ on sait qu'il faut connaître trois paramètres, que l'on déduira à leur tour, au moyen de trois équations en partant des nombres différents m_1, m_2, m_3. M. Charlier a divisé l'ensemble en trois groupes comme le montre le tableau suivant :

Catalogue.	C_7.			C_4.		
	m.	$m_{corr.}$	$A(m)$.	m.	$m_{corr.}$	$A(m)$.
BD	5,9	5,87	52	5,9	5,64	56
BD	9,2	9,62	3289	9,2	9,29	8180
C. d. C.....	13,89	13,89	74045	13,89	13,89	716832

A l'aide de ces nombres on commence par déduire, des trois équations mentionnées, la valeur de N. Par une interpolation graphique, M. Charlier a trouvé, pour C_7

$$N = 630000;$$

pour C_4 :

$$N = 30000000.$$

Connaissant N, on calculera facilement x et y puis, de $k = \frac{1}{y}$ et $m_0 = kx$, on déduit les paramètres k et m_0, et la fonction $A(m)$ se trouve déterminée.

Pour les deux carrés en question on a obtenu

C_7.....	$N = 630000$	$k = +3,108$	$m_0 = 17^m,59$
C_4.....	$N = 30000000$	$k = +3,119$	$m_0 = 20^m,07$

De là on conclut l'expression de $a(m)$ donnant la fréquence des étoiles de grandeur apparente m, on a en effet, dans C_7 :

$$a(m) = \frac{630000}{3,108\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(m-17,59)^2}{2.(3,108)^2}};$$

dans C_4 :

$$a(m) = \frac{30000000}{3,119\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(m-20,07)^2}{2.(3,119)^2}}.$$

Si ces formules sont exactes, le nombre d'étoiles ira en augmentant jusqu'à la grandeur $20^m,1$ pour le carré C_4 situé dans la Voie lactée, et jusqu'à $17^m,6$ pour le carré C_7.

Il peut être intéressant de connaître et de comparer entre elles les valeurs des paramètres N, k, m_0, correspondant aux différents carrés. Les disciples de M. Charlier ont effectué ces calculs pour neuf carrés dont on trouvera les résultats réunis dans le tableau que voici :

Carré.	N.	k.	m_0.	Calculé par
			m	
C_1.....	1985000	+3,017	+18,34	Poor.
C_2.....	3430000	3,363	19,92	Wicksell.
C_3.....	4885000	3,175	18,93	Gyllenberg.
C_4.....	30000000	3,119	20,07	Charlier.
C_5.....	1950000	2,832	17,51	Stadler.
C_6.....	600000	2,846	16,91	Jung.
C_7.....	630000	3,108	17,59	Charlier.
C_8.....	1010000	3,179	18,18	Jöhnsson.
C_9.....	1550000	+2,705	+16,88	Åkesson.
Moyenne.		+3,038		

Dans le tableau ci-après on a résumé les calculs de $A(m)$ relatifs aux différentes grandeurs pour le carré C_4 que l'on pourra comparer aux nombres déduits des observations.

m (BD).	m.	$A(m)$ calc.	$A(m)$ obs.
4,9	4,66	12	19
5,9	5,64	56	56
6,9	6,62	243	211
7,9	7,72	1100	816
8,9	8,95	5500	4207
9,0	9,07	6300	5801
9,1	9,16	7000	6655
9,2	9,25	8200	8180
9,3	9,49	10400	10589
C. d. C.	13,89	694000	717000

IV. *Distances des astres.* — Dans l'état actuel de nos connaissances, il n'est guère possible de donner une solution satisfaisante du problème des distances stellaires. Théoriquement, il existe deux procédés permettant de déterminer les distances moyennes des étoiles de grandeur m.

Le premier, direct, basé sur les distances déduites des observations, est à abandonner, d'une part à cause de l'inexactitude dans les mesures mêmes, d'autre part à cause du nombre relativement très limité des données actuelles.

Le second, basé sur la proposition III, consiste à utiliser les mouvements propres. Loin d'être à l'abri de toute critique et de fournir des résultats concluants, il permet néanmoins de se procurer certains renseignements généraux sur la solution du problème. Voici le principe de cette méthode :

En admettant que la formule

$$M_m(p) = K_2 e^{-\lambda m}$$

représente effectivement les observations, on pourra utiliser les mouvements propres connus pour évaluer les paramètres K_2 et λ. D'autre part, on a, d'après la proposition III,

$$M_m(\pi) = K_3 e^{-\lambda m},$$

où λ est déjà connu. Quant à K_3, on pourra se servir des parallaxes connues pour en avoir une valeur approchée. La méthode présente

évidemment des inconvénients et donne lieu à certaines objections sérieuses.

En effet, la valeur moyenne M (P) de la projection des vitesses linéaires varie d'un carré à l'autre, en partie à cause du mouvement de translation du système solaire, en partie à cause des mouvements stellaires systématiques.

Il en est de même pour la constante K_2, fonction de M (P). Par conséquent, le paramètre λ lui-même doit être déterminé séparément pour chacun des carrés. Et ce n'est qu'alors seulement que l'on pourra procéder aux déterminations de K_3 basées sur les parallaxes connues.

De toute façon, il convient de faire remarquer que ce procédé ne conduit pas non plus au but que l'on s'est proposé d'atteindre. Il permet néanmoins de se faire une idée approchée sur la structure du système galactique et c'est pourquoi on en rappelle ici les principaux points.

Si l'on envisage l'expression de $M_m(p)$ en l'écrivant

$$M_m(p) = K_2 e^{-\lambda m} = K_2 e^{-\lambda_1 b m}$$

on aura, pour deux valeurs quelconques m_1 et m_2 de m, deux expressions $M_{m_1}(p)$ et $M_{m_2}(p)$. On en déduira aisément que

$$\lambda_1 = \frac{S}{m_2 - m_1} [\log M_{m_1}(p) - \log M_{m_2}(p)].$$

Or, on peut admettre que les fonctions de fréquence des composantes du mouvement propre

$$x = \Delta\alpha \cos\delta \qquad \text{et} \qquad y = \Delta\delta$$

soient du type A, par conséquent de la forme

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}}, \qquad \varphi(y) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_1^2}},$$

de telle sorte que l'on peut introduire, à la place de $M_{m_1}(p)$ et $M_{m_2}(p)$, les moyennes $M(x)$ et $M(y)$ de x respectivement de y, ou encore mieux, les coefficients de dispersion correspondants. L'équation précédente devient dans ce cas

$$\lambda_1 = \frac{5}{m_2 - m_1} \log \frac{\sigma_1}{\sigma_2}.$$

Voici les valeurs numériques de λ_1 pour douze carrés :

C_1.....	$\lambda_1 = +0,56$	C_7	$\lambda_1 = +0,92$
C_2.....	$+0,14$	C_8	$-0,44$
C_3.....	$+0,27$	C_9	$+0,46$
C_4.....	$+0,75$	C_{10}.....	$+0,14$
C_5.....	$+0,87$	C_{11}.....	$+0,54$
C_6.....	$-0,08$	C_{12}.....	$-0,12$

Moyenne..... $\lambda_1 = +0,335.$

En particulier, pour le carre C_3, M. Charlier a trouvé, à l'aide de 95 mouvements propres, des astres de grandeur $4^m,0$ et $5^m,0$:

Avec x..... $\lambda_1 = +0,304$

Avec y..... $\lambda_1 = +0,230.$

Et en utilisant les mouvements propres de Boss des étoiles de grandeurs $4^m,0$-$6^m,0$, il a déduit $\lambda_1 = +0,351$ (Kapteyn: $\lambda = +0,65$).

Après avoir ainsi calculé λ_1 on peut revenir à la question des parallaxes. En introduisant à la place des parallaxes les distances r mêmes, exprimées en siriomètres, on a la formule

$$M_m(r) = K_4 e^{\lambda_1 bm}.$$

Sur la valeur de K_4 on ne sait rien de précis. D'habitude on la suppose constante pour tout le ciel. Si l'on adopte, dans ce cas, pour la distance d'un astre de $5^m,0$ 10 sir., la dernière formule devient

$$M(r) = 10 e^{\lambda_1 b(m-5)}.$$

Et la relation cherchée pour les distances prend la forme

$$\log M(r) = 1 - \lambda_1 + 0,2\lambda_1 m.$$

Pour terminer, il reste encore à définir la fonction de densité $D(r)$. Or, on a

$$D(r) = D(e^{-by}) = \frac{1}{\omega b} e^{3by} \Delta_0(y),$$

et d'après l'expression hypothétique de $\Delta_0(y)$ (p. 62).

$$D(r) = \frac{D_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-m_3)^2}{2\sigma_1^2}} \qquad m_3 = m_1 + 3b\sigma_1^2,$$

$$D_0 = \frac{N}{\sigma_1 \omega b} e^{3m_1 b + \frac{9}{2} b^2 \sigma_1^2}.$$

Voici les tableaux des distances moyennes correspondant aux grandeurs de $-1^m,0$ à $20^m,0$ et des densités par sir. cubique pour le carré C_4, calculées avec trois hypothèses pour λ :

M(r) *en sir.*

m.	$\lambda_1 = \frac{1}{3}$.	$\lambda_1 = \frac{1}{2}$.	$\lambda_1 = \frac{2}{3}$.
—1.....	4,0	2,5	1,6
0.....	4,6	3,2	2,2
1.....	5,4	4,0	2,9
2.....	6,3	5,0	4,0
3.....	7,4	6,3	5,4
4.....	8,6	7,9	7,4
5	10,0	10,0	10,0
6.....	11,7	12,6	13,6
7.....	13,6	15,8	18,5
8.....	15,8	20,0	25,1
9.....	18,5	25,1	34,1
10.....	21,5	31,6	46,4
11.....	25,1	39,8	63,1
12.....	29,3	50,1	85,7
13.....	34,1	63,1	117
14.....	39,8	79,4	158
15.....	46,4	100	215
16.....	54,1	126	293
17.....	63,1	158	398
18.....	73,6	200	541
19.....	85,7	251	736
20.....	100	316	1000

D(r) *par sir. cubique* C_4.

r sir.	$\lambda_1 = \frac{1}{3}$.	$\lambda_1 = \frac{1}{2}$.	$\lambda_1 = \frac{2}{3}$.
10.....	2355	301	34,4
50.....	396	107	18,9
100.....	58,8	30,1	7,9
150.....	14,2	11,7	4,2
200.....	3,7	5,6	2,4
250.....	1,4	2,9	1,5
300.....	0,60	1,7	1,03
350.....	0,27	1,00	0,70
400.....	0,14	0,64	0,51
450.....	0,06	0,42	0,37
500.....	0,04	0,28	0,29
550.....	0,02	0,20	0,23
600.....	0,01	0,14	0,18
650.....		0,11	0,13
700.....		0,08	0,11
750.....		0,06	0,09
800.....		0,04	0,08
850.....		0,04	0,06
900.....		0,03	0,05
950.....		0,02	0,04
1000.....		0,02	0,04

Le paramètre λ_1 est donc d'une importance prépondérante aussi bien dans l'étude des distances que dans celle de la densité. Des nombres de ces tableaux il ressort en outre qu'une incertitude dans la valeur de λ_1 modifie considérablement les résultats relatifs aux distances et aux densités.

Recherches statistiques sur les mouvements stellaires.

Depuis l'époque où Herschel réussit à établir l'existence du mouvement de translation du système solaire, la connaissance des déplacements angulaires apparents des astres a permis d'aborder

d'intéressants problèmes relatifs à la constitution de l'Univers stellaire.

De nombreux procédés, basés sur divers principes, ont été imaginés et appliqués à la résolution de ces problèmes. De l'accord plus ou moins satisfaisant entre les résultats ainsi obtenus, on a pu conclure que l'inefficacité des méthodes actuelles tenait surtout à l'insuffisance des données au point de vue nombre et précision.

Pour tirer le plus grand parti possible des données disponibles, M. Charlier a développé une série de méthodes nouvelles, basées sur la théorie des probabilités. Sans être tout à fait à l'abri des mêmes inconvénients que l'on rencontre dans les méthodes antérieures, l'avantage incontestable de la nouvelle théorie réside principalement dans sa généralité lui permettant d'aborder les questions les plus variées de l'astronomie stellaire.

Dans ce qui suit, on trouvera l'exposé de la partie tant théorique que numérique concernant l'étude des mouvements propres à l'aide de ces méthodes. Bien que le problème général comporte non seulement l'étude des déplacements angulaires, mais aussi celle des vitesses radiales, on laissera pour le moment de côté cette deuxième question.

Ces recherches sont basées sur les plus récentes déterminations des mouvements propres jusqu'à la 6^{e} grandeur se trouvant réunies dans le *Prel. Gen. Cat.* (*P. G. C.*) de L. Boss. Comme dans les chapitres précédents, l'ensemble de données est divisé en 48 carrés dont chacun est traité à part.

Les calculs préliminaires comportent trois phases, savoir :

a. Détermination des paramètres caractéristiques de la fonction de corrélation relatives aux composantes des mouvements en α et δ pour chaque carré;

b. Calcul des paramètres de la fonction de corrélation des vitesses linéaires correspondantes;

c. Discussion de l'ensemble des résultats ainsi obtenus pour les 48 carrés en vue d'en déduire :

1° Mouvement de translation du Soleil;

2° Déplacement du plan invariable;

3° Conclusion sur la validité des deux hypothèses, ellipsoïdale et des deux courants stellaires, relatives à la distribution des mouvements des astres.

Les solutions de ces trois problèmes peuvent être ainsi résumées :

1° La discussion des mouvements stellaires doit être fondée non pas sur les déplacements angulaires apparents, mais sur les vitesses linéaires des astres. Ces dernières se calculent au moyen des mouvements propres observés dès que l'on a fixé un certain paramètre q, dont la valeur numérique paraît être comprise entre les limites $1 < q < 1{,}27$;

2° Le nœud du plan invariable, rapporté au plan galactique, a un mouvement direct de $0'',003\,528$ par an ;

3° L'hypothèse ellipsoïdale relative à la distribution spatiale des mouvements stellaires, tout en laissant subsister encore quelques discordances, fournit une assez bonne représentation des observations ;

4° Aucune conclusion ne peut être énoncée sur la légitimité de l'hypothèse des deux courants stellaires.

Désignons par u, v les déplacements angulaires apparents

$$u = \Delta\alpha \cos\delta, \qquad v = \Delta\delta.$$

Les composantes U, V de la vitesse linéaire correspondante, projetée sur deux axes rectangulaires, perpendiculaires à la ligne de visée, sont

$$U = ru, \qquad V = rv,$$

r étant la distance de l'astre à l'observateur.

Soient, en outre, $\varphi(u, v)$ et $\varphi(U, V)$ les fonctions de corrélation respectives. En vertu des définitions déjà connues, leurs moments d'ordre successifs sont donnés par les formules

$$\nu'_{m,n} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} u^m v^n \varphi(u, v)\, du\, dv,$$

$$N'_{m,n} = \int_{+\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} U^m V^n \varphi(U, V)\, dU\, dV$$

ou

$$\nu_{m,n} = \int_{-\infty}^{-\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (u - x_0)^m (v - y_0)^n \varphi(u, v)\, du\, dv,$$

$$N_{m,n} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (U - X_0)^m (V - Y_0)^n \varphi(U, V)\, dU\, dV,$$

suivant qu'on les rapporte à l'origine des coordonnées, ou aux points (x_0, y_0), (X_0, Y_0) correspondant aux moyennes. En se reportant aux définitions même des moments, on en déduira sans difficulté les formules explicites de ces quantités

$$\left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = 0, 1, 2, 3.$$

La première question est de savoir comment calculer les vitesses linéaires qnand on connaît les mouvements propres observés. Pour cela, on admet que ces vitesses sont indépendantes de la distance astre-Terre. Des relations précédentes, on déduit

$$u^m \varphi^n = \frac{1}{r^{m+n}} U^m V^n,$$

donc

$$M(u^m \varphi^n) = M\left(\frac{1}{r^{m+n}}\right) \times M(U^m V^n).$$

$M(x)$ étant la moyenne de x.

En faisant intervenir les moments, cette équation prend la forme

$$\nu'_{m,n} = \Im_{m,n} N'_{m,n}, \qquad \text{ou} \qquad \Im_s = M\left(\frac{1}{r^s}\right).$$

Quant à la valeur même de $\Im_s$, elle se déduit facilement de la relation connue

$$M_m\left(\frac{1}{r^s}\right) = \int_{-\alpha}^{+\infty} e^{sby} \Delta_0(y) \varphi_0(m+y) dy : \int_{-\alpha}^{+\alpha} \Delta_0(y) \varphi_0(m+y) dy.$$

En effet, $\Delta_0(y)$ et $\varphi_0(m+y)$ étant supposées de la forme des fonctions du type A, on a

$$\Im_s = M_m\left(\frac{1}{r^s}\right) = e^{s\beta + s^2\gamma} = e^{s(\beta+\gamma)} e^{s^2\gamma - s\gamma} = \Im_1^s q^{s^2-s},$$

où

$$\beta = b[m_1(1-\lambda_1) + m_2\lambda_1 - m\lambda_1],$$

et

$$\gamma = \frac{1}{2} b^2 k^2 \lambda_1 (1-\lambda_1), \qquad \Im_1 = e^{\beta+\gamma} \qquad \text{et} \qquad q = e^{\gamma}.$$

En adoptant pour λ_1 la valeur $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ et pour k la valeur

déduite des nombres pour neuf carrés (p. 67) $k = 3$, on a $q = 1{,}2695$.

La connaissance des quantités $\mathfrak{I}_4$ et q permet donc de passer des moments et paramètres caractérisant la fonction de corrélation des mouvements angulaires à ceux relatifs aux vitesses linéaires.

Ici se place une remarque concernant le paramètre $q' = q^{-2}$. Wicksell, dans ses recherches sur les mouvements propres faites à la suite des travaux de M. Charlier sur le même sujet, est arrivé (1) à la conclusion suivante :

Les paramètres caractéristiques du troisième et quatrième ordre de la fonction de fréquence des vitesses linéaires changent de signe pour une valeur voisine de $q' = 0{,}75$. De telle sorte que, même si la répartition des mouvements propres diffère notablement de la loi normale des erreurs, celle des vitesses linéaires peut très bien être représentable par une fonction normale. Mais rien ne prouve *a priori* que $q' = 0{,}75$ soit la vraie valeur de ce paramètre.

Voici les valeurs de q' correspondant aux différents types spectraux

Sp. :	B.	A.	F.	G.	K.	M.
$q' =$	0,68	0,64	0,69	0,54	0,70	1,02.

La détermination pour le type M est très incertaine à cause du petit nombre d'astres utilisés.

Avant de procéder au calcul des moments et paramètres des fonctions de corrélation, on a divisé l'ensemble des données pour chaque carré en quatre groupes :

1° Mouvements propres des astres plus brillants que $m = 4^m{,}0$ (424 astres),
2° » » » de $m = 4^m{,}0$ (922 »),
3° » » » de $m = 5^m{,}0$ (2695 »),
4° » » » » que $m = 6^m{,}0$ (4041 »).

Chacun des 48 carrés donne ainsi lieu à quatre tableaux de corrélations construites de la manière suivante :

---

(1) M. L., II, n° 12.

	α :	−5.	−4.	−3.	−2.	−1.	0.	+1.	+2.	+3.	+4.	
δ.	α.	δ :	−0″,275.	−0″,225.	−0″,175.	−0″,125.	−0″,075.	−0″,025.	+0″,025.	+0″,075.	+0″,125.	+0″,175.	Σ
+3	+0″,125												
+2	+0″,075				1								
+1	+0″,025							3	1	2			
0	−0″,025						3	54	15	1	1		
−1	−0″,075			1		2	2	9	3	1			
−2	−0″,125				2		1						
−3	−0′,175						1						
−4	−0″,225			1		1							
−5	−0″,275			1									
−6	−0″,325												
−7	−0″,375		1										
Σ			1		4	5	7	66	19	4	1		1

Mouvement propre moyen en α..... $x_0 = -0,528 \times 0'',05$,
» » » en δ..... $y_0 = -0,864 \times 0'',05$,
Coefficient de dispersion en α..... $\sigma_x = +1,072 \times 0'',05$,
» » en δ..... $\sigma_y = +1,148 \times 0'',05$,
» d'obliquité en α..... $S_x = +0,496$,
» » en δ..... $S_y = +1,521$,
Excès en α..... $E_x = +0,346$,
» en δ..... $E_y = +1,561$.

De même, on peut calculer facilement les moments de différents ordres par rapport à x_0 et y_0. En groupant les résultats ainsi obtenus relatifs aux 48 carrés on obtient quatre tableaux dont les caractères généraux se résument ainsi :

1° La répartition des mouvements propres observés n'est pas symétrique par rapport aux valeurs moyennes de x et y. D'une façon presque régulière, le tableau de corrélation est prolongé dans un sens ;

2° Les fréquences accusent une forme qui est loin de la normale : l'obliquité de la distribution est très prononcée, l'excès est presque toujours positif.

Toutefois, il n'en résulte nullement qu'il en soit de même avec les vitesses linéaires, car rien n'indique que ces dernières soient proportionnelles aux déplacements apparents.

Avec le matériel d'observation ainsi préparé on a tout ce qu'il est nécessaire pour entreprendre l'exécution du programme fixé au début de ce chapitre.

I. *Mouvement du système solaire.* — Considérons deux systèmes de coordonnées rectangulaires S_1 (X_1, Y_1, Z_1) et S_2 (X_2, Y_2, Z_2). S_1 a comme plan des xy le plan de l'équateur moyen et l'axe des z dirigé vers le pôle moyen pour 1900,0. S_2 a l'axe des z dirigé vers le centre de gravité d'un quelconque des 48 carrés, les axes des x et y dirigés dans le sens des ascensions droites respectives des déclinaisons croissantes.

En désignant par $\gamma_{m,\,n}$ les cosinus directeurs, on pourra passer d'un système à l'autre au moyen du schéma suivant :

	X_1.	Y_1.	Z_1.
X_2.....	γ_{11}	γ_{21}	γ_{31}
Y_2.....	γ_{12}	γ_{22}	γ_{32}
Z_2.....	γ_{13}	γ_{23}	γ_{33}

En particulier si U_1, V_1, W_1 dans S_1 et U_2, V_2, W_2 dans S_2 désignent les composantes de la vitesse relative d'un astre par rapport au Soleil, on aura

$$\begin{aligned} U_1 &= \gamma_{11} U_2 + \gamma_{12} V_2 + \gamma_{13} W_2, \\ V_1 &= \gamma_{21} U_2 + \gamma_{22} V_2 + \gamma_{23} W_2, \\ W_1 &= \gamma_{31} U_2 + \gamma_{32} V_2 + \gamma_{33} W_2. \end{aligned}$$

α et δ étant l'ascension droite et la déclinaison du centre d'un carré, les valeurs des cosinus directeurs $\gamma_{m,\,n}$ sont :

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= -\sin\alpha, & \gamma_{21} &= \cos\alpha, & \gamma_{31} &= 0, \\ \gamma_{12} &= -\cos\alpha\sin\delta, & \gamma_{22} &= -\sin\alpha\sin\delta, & \gamma_{32} &= \cos\delta, \\ \gamma_{13} &= \cos\alpha\cos\delta, & \gamma_{23} &= \sin\alpha\cos\delta, & \gamma_{33} &= \sin\delta. \end{aligned}$$

En ce qui concerne les coordonnées des centres des carrés, leurs ascensions droites se trouvent déterminées par la division même du ciel, quant à leurs déclinaisons on a adopté les valeurs suivantes :

Carrés.....	$A_1 - A_2$.	$B_1 - B_{10}$.	$C_1 - C_{12}$.	$D_1 - D_{12}$.	$E_1 - E_{10}$.	$F_1 - F_2$.
δ du centre...	$+80°$	$+45°6',0$	$+14°28',6$	$-14°28',6$	$-45°6',0$	$-80°$

Si le mouvement apparent moyen des astres d'un carré ne dépendait que du mouvement de translation du système solaire, on aurait, pour calculer ce mouvement, 2×48 équations de la forme

$$M(U) = X_0 = \frac{x_0}{\varepsilon_1}, \qquad M(V) = Y_0 = \frac{y_0}{\varepsilon_1}.$$

On les résoudrait par la méthode des moindres carrés et l'on en tirerait les quantités $\Im_1 U_1$, $\Im_1 V_1$, $\Im_1 W_1$ permettant ensuite de calculer les coordonnées de l'apex et la vitesse du Soleil.

Mais si, en plus du déplacement solaire, le système S_1 est animé lui-même d'un mouvement de rotation autour d'un axe instantané de rotation, les mouvements propres apparents en seront également affectés. Pour évaluer l'ordre de grandeur d'un tel mouvement, rapportons S_1 à un système de référence supposé fixe, soit le plan de l'écliptique d'une certaine époque. Soient $\Delta\Omega$ et Δi les variations dans la position du nœud et de l'angle d'inclinaison dues au mouvement du système S_1. L'effet produit sur les coordonnées d'un astre, par suite de ces variations, se déduit des formules différentielles de la trigonométrie sphérique. On a

$$\cos\Delta\alpha = (\cos\varepsilon\cos\delta + \sin\varepsilon\sin\delta\sin\alpha)\Delta\Omega - \cos\alpha\sin\delta\Delta i,$$
$$\Delta\delta = \cos\alpha\sin\varepsilon\,\Delta\Omega + \sin\alpha\Delta i.$$

Si donc les quantités observées x_0, y_0 renferment réellement des termes provenant de $\Delta\Omega$ et Δi, ce qui semble probable pour le plan invariable de notre système planétaire, les équations qui déterminent la position de l'Apex et la vitesse de translation solaire auront la forme

$$x_0 = \gamma_{11}\Im_1 U_1 + \gamma_{21}\Im_1 V_1 + (\cos\delta\cos\varepsilon + \sin\delta\sin\varepsilon\sin\alpha)\Delta\Omega - \cos\alpha\sin\delta\,\Delta i,$$
$$y_0 = \gamma_{12}\Im_1 U_1 + \gamma_{22}\Im_1 V_1 + \gamma_{32}\Im_1 W_1 + \cos\alpha\sin\varepsilon\,\Delta\Omega + \sin\alpha\Delta i.$$

Elles permettent en même temps d'évaluer l'ordre de grandeur des variations $\Delta\Omega$ et Δi du plan invariable que l'on doit attribuer à l'existence d'une force attractive de l'ensemble des corps de l'Univers stellaire. La solution de ce problème est d'une importance considérable pour les recherches sur la constitution de la Galaxie, car on pourrait en déduire certains renseignements sur la masse totale des astres de la Voie lactée.

Grâce à la répartition symétrique des 48 carrés, les problèmes du mouvement solaire et du plan invariable peuvent être étudiés indépendamment l'un de l'autre.

Des 96 équations de conditions, formées avec les données connues, on obtient les systèmes normaux suivants :

	Pour $4^m,0$.	Pour $5^m,0$.	
$26,0000\,\mathfrak{I}_1 U_1 =$	$-\ 0,1748$	$=+\ 1,0022$	en x_0,
$22,0008\,\mathfrak{I}_1 V_1 =$	$-18,1789$	$=-18,7731$	

	Pour $4^m,0$.	Pour $5^m,0$.	
$5,7680\,\mathfrak{I}_1 U_1 =$	$-\ 1,1716$	$=+\ 0,4310$	en y_0.
$9,6460\,\mathfrak{I}_1 V_1 =$	$-\ 9,0711$	$=-\ 7,0178$	
$82,5888\,\mathfrak{I}_1 W_1 =$	$+\ 19,3751$	$=+16,0758$	

En désignant par s la vitesse linéaire du Soleil, par $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{D}$ l'ascension droite et la déclinaison de l'Apex ces équations exprimées en arc, deviennent

	Pour $4^m,0$.	Pour $5^m,0$.
$\mathfrak{I}_1 s \cos\mathfrak{R}\cos\mathfrak{D} =$	$-0,00212$	$=+0'',00226,$
$\mathfrak{I}_1 s \sin\mathfrak{R}\cos\mathfrak{D} =$	$-0,04305$	$=-0'',04075,$
$\mathfrak{I}_1 s \sin\mathfrak{D} =$	$+0,02973$	$=+0'',02460.$

d'où

	Pour $4^m,0$.		Pour 5^m.	
$\mathfrak{R}$.....	$267^\circ,18$	$\pm 3^\circ,59$	$\mathfrak{R}$.....	$273^\circ,17$ $\pm 2^\circ,06$
$\mathfrak{D}$.....	$+34,59$	$\pm 2,96$	$\mathfrak{D}$.....	$+31^\circ,15$ $\pm 1,76$
$\mathfrak{I}_1 s$....	$+0'',0524$	$\pm 0'',0027$	$\mathfrak{I}_1 s$....	$+0'',0477$ $\pm 0'',0018$

Des deux valeurs $\mathfrak{I}_1 s$ on a déduit en même temps une valeur pour le paramètre λ_1, à savoir

$$\lambda_1 = 5[\log M_{m_1}(p) - \log M_{m_2}(p)] = 5[\log \mathfrak{I}_1(4^m) - \log \mathfrak{I}_1(5^m)]$$
$$= +0,203 \pm 0,146.$$

Il peut être intéressant de faire remarquer que la position de l'Apex peut également s'obtenir par un procédé graphique. Considérons le plan tangent en un point quelconque de l'équateur d'ascension droite α_0. Dans ce plan, prenons pour l'axe des X la projection du plan de l'équateur, l'origine étant au point de contact. Un point $(\alpha\,\delta)$ sur la sphère aura pour coordonnées rectangulaires

$$x = \operatorname{tang}(\alpha - \alpha_0), \qquad y = \frac{\operatorname{tang}\delta}{\cos(\alpha - \alpha_0)}.$$

Il en résulte

$$\frac{y^2}{\operatorname{tang}^2\delta} - x^2 = 1,$$

c'est-à-dire, les projections sur le plan tangent des parallèles sont des hyperboles. En projetant sur un plan les mouvements propres

moyens $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ des astres appartenant aux différents carrés, on déduit des équations précédentes

$$\Delta x = \frac{\Delta\alpha}{\cos^2(\alpha - \alpha_0)},$$

$$\Delta y = \frac{\operatorname{tang}\delta \sin(\alpha - \alpha_0)}{\cos^2(\alpha - \alpha_0)}\Delta\alpha + \frac{\Delta\delta}{\cos^2\delta\cos(\alpha - \alpha_0)}.$$

La sphère céleste se trouve ainsi projeté sur un parallélipipède de côté égal au diamètre de la sphère (rayon = 1) et de hauteur égale à 2 tang 66°,26′,6; les projections des quatre carrés polaires forment les bases du parallélipipéde (*voir* fig. 9, page 97).

Quant au déplacement du plan invariable, des équations précédentes on déduit le système normal suivant :

$$\left.\begin{aligned} 32,4404\,\Delta\Omega &= -0'',0325 \\ 31,7680\,\Delta i &= +0'',1106 \end{aligned}\right\} \ 4^m,0 \text{ et } 5^m,0 \text{ réunies,}$$

d'où

$$\Delta\Omega = -0'',0010 \pm 0'',0018,$$
$$\Delta i = +0'',0034 \pm 0'',0018.$$

Les erreurs moyennes sont évidemment fortes, cependant les valeurs mêmes ainsi déduites paraissent s'accorder avec la théorie précédemment exposée.

En effet, soit $\alpha_0\ \delta_0$ le point qui n'est pas affecté par le mouvemen de rotation du système S_1. On aura pour ce point

$$(\cos\varepsilon\cos\delta_0 + \sin\varepsilon\sin\delta_0\sin\alpha_0)\Delta\Omega - \sin\delta_0\cos\alpha_0\Delta i = 0,$$
$$\cos\alpha_0\sin\varepsilon\Delta\Omega + \sin\alpha_0\Delta i = 0.$$

De la deuxième équation on tire

$$\operatorname{tang}\alpha_0 = -\frac{\Delta\Omega}{\Delta i}\sin\varepsilon,$$

et, en substituant cette valeur dans la première, on trouve

$$\operatorname{tang}\delta_0 = -\frac{\sin\alpha_0}{\operatorname{tang}\varepsilon}.$$

De ces deux équations on déduit, à l'aide des nombres trouvés pour $\Delta\Omega$ et Δi,

$$\alpha_0 = 186°,7 \qquad \text{et} \qquad \delta_0 = +15°,1.$$

Or, d'après Houzeau et Gould, les coordonnées du pôle galactique

sont

$$\alpha = 191^\circ \qquad \text{et} \qquad \delta = +27^\circ.$$

On peut en conclure, par conséquent, qu'à l'exactitude près des nombres $\Delta\Omega$ et Δi, les mouvements propres stellaires semblent compatibles avec l'hypothèse d'un mouvement du plan invariable pendant lequel son inclinaison sur le plan galactique reste constante.

Il reste à calculer le mouvement nodal de ce plan sur le plan galactique. Soit ω la vitesse angulaire moyenne du système S_1 autour de l'axe instantané de rotation. Les composantes ω_x, ω_y, ω_z de ω sont définies par

$$\begin{aligned} \omega_x &= \omega \cos\alpha_0 \cos\delta_0, \\ \omega_y &= \omega \sin\alpha_0 \cos\delta_0, \\ \omega_z &= \omega \sin\delta_0. \end{aligned}$$

Les variations correspondantes en coordonnées xyz sont

$$\begin{aligned} \Delta x &= y\omega_z - z\omega_y, \\ \Delta y &= z\omega_x - x\omega_z, \\ \Delta z &= x\omega_y - y\omega_x. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} x &= \cos\alpha\cos\delta \quad \text{de sorte que l'on a} \quad \Delta x = -\sin\alpha\cos\delta\Delta\alpha - \cos\alpha\sin\delta\Delta\delta, \\ y &= \sin\alpha\cos\delta \quad \text{»} \quad \Delta y = \cos\alpha\cos\delta\Delta\alpha - \sin\alpha\sin\delta\Delta\delta, \\ z &= \sin\delta \quad \text{»} \quad \Delta z = \cos\delta\Delta\delta, \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \Delta\alpha\cos\delta &= \cos\alpha\sin\delta\omega_x + \sin\alpha\sin\delta\omega_y - \cos\delta\omega_z, \\ \Delta\delta &= -\sin\alpha\omega_x + \cos\alpha\omega_y. \end{aligned}$$

Enfin, en égalant les deux membres des deux équations en ω_x, ω_y, ω_z d'une part et du système normal déduit des mouvements propres, pour tous les astres de $4^m,0$ et $5^m,0$ d'autre part, on trouve :

$$\begin{aligned} \omega_x &= \omega\cos\alpha_0\cos\delta_0 = -\Delta i = -0'',003385, \\ \omega_y &= \omega\sin\alpha_0\cos\delta_0 = \Delta\Omega\sin\varepsilon = -0'',000398, \\ \omega_z &= \omega\sin\delta_0 = -\Delta\Omega\cos\varepsilon = +0'',000917. \end{aligned}$$

Pour α_0 et δ_0 on en déduit des valeurs identiques à celles trouvées plus haut, et pour ω, on a

$$\omega = +0'',003528.$$

Le nœud du plan invariable, rapporté au plan galactique, est animé d'un mouvement direct de $0'',0035$ par an.

Distribution dans l'espace des vitesses linéaires.

La théorie cinétique des gaz nous apprend que, dans une masse gazeuse entièrement libre, la distribution des vitesses relatives par rapport au centre de gravité satisfait à la loi dite de Maxwell. Envisagée sous sa forme mathématique cette loi énonce que la probabilité, pour qu'une des trois composantes de la vitesse considérée ait une valeur donnée, est la même que celle d'une erreur d'observation donnée, exprimée par la loi de Gauss.

Or, rien *à priori* ne semble s'opposer à assimiler l'Univers stellaire à une masse gazeuse, les mouvements propres des astres aux mouvements des molécules de cette masse et, par conséquent, à leur appliquer la même loi. Aussi quelques tentatives furent faites en vue de donner une idée sur la constitution du monde sidéral par cette conception simple, mais durent être vite abandonnées.

Dans un mémoire paru en 1897 (¹), Kobold a montré en effet que les mouvements propres stellaires semblent être caractérisés par une prédilection pour certaines directions toutes parallèles au plan galactique. Quelques années plus tard, à la suite de considérations mathématiques et statistiques tout à fait minutieuses. Kapteyn a été conduit à émettre l'hypothèse suivante. La Voie lactée est constituée de deux systèmes, appelés *deux courants* d'étoiles, ayant des mouvements de translation parallèles au plan galactique mais de sens opposés. Les deux systèmes ne se superposent pas, mais se pénètrent mutuellement. A chacun d'eux s'applique la loi de Maxwell.

Quelque temps après, sans élever de sérieuses objections contre l'hypothèse des deux courants, Schwarzschild a donné une autre hypothèse, dite *ellipsoïdale*, tendant à montrer que les mouvements stellaires pouvaient aussi bien être représentés tout en conservant l'unité du système galactique. Dans les pages suivantes on examinera les deux hypothèses au point de vue statistique.

(¹) *A. N.*, n° 3457.

Hypothèse ellipsoïdale (1). — Soient U_3, V_3, W_3 les composantes de la vitesse d'un astre relative au Soleil. D'après l'hypothèse considérée, le nombre des astres dont ces trois composantes sont comprises entre les limites

$$U_3 \mp \frac{1}{2} dU_3, \qquad V_3 \mp \frac{1}{2} dV_3, \qquad W_3 \mp \frac{1}{2} dW_3$$

est exprimé par la formule

$$z = H e^{-\frac{1}{2} f}$$

H étant une constante et $f = A_3 U_3^2 + B_3 V_3^2 + C_3 W_3^2$.

La surface $f =$ const. est un ellipsoïde, que l'on appelle l'*ellipsoïde des vitesses*.

Le problème que l'on se propose de résoudre peut être ainsi énoncé : A l'aide des vitesses linéaires correspondant aux mouvements propres observés, déduire la position dans l'espace et la grandeur des axes de l'ellipsoïde des vitesses. Dans la solution que l'on trouvera ici on a supposé, pour simplifier les calculs, que cet ellipsoïde était de révolution.

Reprenons les systèmes de coordonnées déjà définies S_1 et S_2 en y ajoutant un troisième S_3, formé par les axes de l'ellipsoïde en question. Soient $\varepsilon_{m,n}$ les cosinus directeurs inconnus de S_3 rapportés à S_1, de sorte que pour passer de l'un à l'autre de ces systèmes on aura

	X_1.	Y_1.	Z_1.
X_3.....	ε_{11}	ε_{21}	ε_{31}
Y_3.....	ε_{12}	ε_{22}	ε_{32}
Z_3.....	ε_{13}	ε_{23}	ε_{33}

Il en résulte, pour les projections des vitesses dans les deux systèmes,

$$\begin{aligned} U_3 &= \varepsilon_{11} U_1 + \varepsilon_{21} V_1 + \varepsilon_{31} W_1, \\ V_3 &= \varepsilon_{12} U_1 + \varepsilon_{22} V_1 + \varepsilon_{32} W_1, \\ W_3 &= \varepsilon_{13} U_1 + \varepsilon_{23} V_1 + \varepsilon_{33} W_1. \end{aligned}$$

De même on passera, à l'aide de $\varepsilon_{m,n}$ et $\gamma_{m,n}$ de S_2 à S_3 et inversement.

Tout revient donc à calculer $\varepsilon_{m,n}$ à l'aide des mouvements propres

(1) Sauf quelques légères modifications, on a suivi les raisonnements de M. Charlier : M. L. II 9, p. 79-87.

observés. En d'autres termes, étant donnés U_1, V_1, W_1 et $\gamma_{m,n}$, donc U_2, V_2, W_2 aussi, trouver $\varepsilon_{m,n}$ puis A_3, B_3, C_3.

En substituant, dans f, U_3, V_3, W_3 en fonction de $\varepsilon_{m,n}$ et U_1, V_1, W_1, on obtient

$$f = A_1 U_1^2 + B_1 V_1^2 + C_1 W_1^2 + 2 D_1 V_1 W_1 + 2 E_1 W_1 U_1 + 2 F_1 U_1 V_1.$$

Les quantités A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 F_1 étant fonctions de A_3, B_3, C_3 et $\varepsilon_{m,n}$. Dans le cas présent, f = const. représente l'équation de l'ellipsoïde des vitesses rapporté au système S_1. Pour la solution du problème, il faut que l'on puisse calculer à l'aide des observations les six coefficients du second membre.

Or, si l'on fait tourner le système S_1 de manière à le faire coïncider avec S_2, f devient

$$f = A_2 U_2^2 + B_2 V_2^2 + C_2 W_2^2 + 2 D_2 V_2 W_2 + 2 E_2 W_2 U_2 + 2 F_2 U_2 V_2,$$

Les coefficients $A_2, \ldots, F_2$ étant fonctions de $A_1, \ldots, F_1$ et $\gamma_{m,n}$.

On voit donc que si l'on pouvait connaître la répartition des vitesses linéaires U_2, V_2, W_2 pour un carré quelconque, les coefficients $A_2, \ldots, F_2$ seraient connus, par conséquent $A_1, \ldots, F_1$ également, les axes de l'ellipsoïde se trouveraient ainsi déterminés.

On va d'abord calculer $A_1, \ldots, F_1$ à l'aide des mouvements perpendiculaires à la ligne de visée. La fonction de répartition correspondante s'obtient en intégrant φ par rapport à W_2 entre les limites $\pm\infty$. On trouve pour f

$$f = A'_1 U_2^2 + B'_1 V_2^2 + 2 F'_1 U_2 V_2$$

où l'on a posé

$$A'_1 = \frac{A_2 C_2 - F_2^2}{C_2}, \qquad B'_1 = \frac{B_2 C_2 - D_2^2}{C_2}, \qquad F'_1 = \frac{F_2 C_2 - D_2 F_2}{C_2},$$

ce que l'on peut écrire, en introduisant les moments,

$$A'_1 = \frac{1}{(1 - r^2) N_{20}}, \qquad B'_1 = \frac{1}{(1 - r^2) N_{02}}, \qquad F'_1 = \frac{N_{11}}{(1 - r^2) N_{20} N_{02}}.$$

Or, les quantités $A'_1 C_2$, $B'_1 C_2$, $F'_1 C_2$ peuvent être exprimées en fonctions des coefficients A_3, B_3, C_3 et les cosinus directeurs $\varepsilon_{m,n}$ et $\gamma_{m,n}$. On a en effet

$$A'_1 C_2 = B_3 C_3 (\varepsilon_{11}\gamma_{12} + \varepsilon_{21}\gamma_{22} + \varepsilon_{31}\gamma_{32})^2 + C_3 A_3 (\varepsilon_{12}\gamma_{12} + \varepsilon_{22}\gamma_{22} + \varepsilon_{32}\gamma_{32})^2 - A_3 B_3 (\varepsilon_{13}\gamma_{12} + \varepsilon_{23}\gamma_{22} + \varepsilon_{33}\gamma_{32})^2,$$

$$B'_1 C_2 = B_3 C_3 (\varepsilon_{11}\gamma_{11} + \varepsilon_{21}\gamma_{21} + \varepsilon_{31}\gamma_{31})^2 + C_3 A_3 (\varepsilon_{12}\gamma_{11} + \varepsilon_{22}\gamma_{21} + \varepsilon_{32}\gamma_{31})^2 + A_3 B_3 (\varepsilon_{13}\gamma_{11} + \varepsilon_{23}\gamma_{21} + \varepsilon_{33}\gamma_{31})^2,$$

$$F'_1 C_2 = -B_3 C_3 (\varepsilon_{11}\gamma_{11} + \varepsilon_{21}\gamma_{21} + \varepsilon_{31}\gamma_{31})(\varepsilon_{11}\gamma_{12} + \varepsilon_{21}\gamma_{22} + \varepsilon_{31}\gamma_{32}) - C_3 A_3 (\varepsilon_{12}\gamma_{11} + \varepsilon_{22}\gamma_{21} + \varepsilon_{32}\gamma_{31})(\varepsilon_{12}\gamma_{12} + \varepsilon_{22}\gamma_{22} + \varepsilon_{32}\gamma_{32}) - A_3 C_3 (\varepsilon_{13}\gamma_{11} + \varepsilon_{23}\gamma_{21} + \varepsilon_{33}\gamma_{31})(\varepsilon_{13}\gamma_{12} + \varepsilon_{23}\gamma_{22} + \varepsilon_{33}\gamma_{32}),$$

$$C_2 = A_3 (\varepsilon_{11}\gamma_{13} + \varepsilon_{21}\gamma_{23} + \varepsilon_{31}\gamma_{33})^2 + B_3 (\varepsilon_{12}\gamma_{13} + \varepsilon_{22}\gamma_{23} + \varepsilon_{32}\gamma_{33})^2 + C_3 (\varepsilon_{13}\gamma_{13} + \varepsilon_{23}\gamma_{23} + \varepsilon_{33}\gamma_{33})^2,$$

ou encore

$$A'_1 C_2 = B_3 C_3 \cos^2 X_3 Y_2 + C_3 A_3 \cos^2 Y_3 Y_2 + A_3 B_3 \cos^2 Z_3 Y_2,$$
$$B'_1 C_2 = B_3 C_3 \cos^2 X_3 X_2 + C_3 A_3 \cos^2 Y_3 X_2 + A_3 B_3 \cos^2 Z_3 X_2,$$
$$F'_1 C_2 = -B_3 C_3 \cos X_3 X_2 \cos X_3 Y_2 - C_3 A_3 \cos Y_3 X_2 \cos Y_3 Y_2 - A_3 B_3 \cos Z_3 X_2 \cos Z_3 Y_2,$$
$$C_2 = A_3 \cos^2 X_3 Z_2 + B_3 \cos^2 Y_3 Z_2 + C_3 \cos^2 Z_3 Z_2.$$

Mais, comme on suppose l'ellipsoïde de révolution, $A_3 = B_3$ et les équations deviennent

$$A'_1 C_2 = B_3 [C_3 + (B_3 - C_3) \cos^2 Z_3 Y_2],$$
$$B'_1 C_2 = B_3 [C_3 + (B_3 - C_3) \cos^2 Z_3 X_2],$$
$$F'_1 C_2 = -B_3 (B_3 - C_3) \cos Z_3 X_2 \cos Z_3 Y_2,$$
$$C_2 = B_3 - (B_3 - C_3) \cos^2 Z_3 Z.$$

Supposons maintenant que l'on fasse tourner les axes de U_2, V_2 d'un angle φ tel que

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{2 F'_1}{A'_1 - B'_1}.$$

En appelant xyz les axes de ce nouveau système, on aura

$$U_2 = x \cos \varphi - y \sin \varphi,$$
$$V_2 = x \sin \varphi + x \cos \varphi.$$

L'expression précédente de f devient dans ce cas

$$f = A_0 x^2 + B_0 y^2$$

où

$$2 A_0 = A'_1 + B'_1 + \frac{A'_1 - B'_1}{\cos 2\varphi},$$
$$2 B_0 = A'_1 + B'_1 - \frac{A'_1 - B'_1}{\cos 2\varphi}.$$

Soit maintenant ψ l'angle que fait l'axe de rotation de l'ellip-

soïde avec l'axe des z, on aura

$$\cos Z_3 z = \cos\psi.$$

D'autre part, en comparant les dernières expressions de f, on voit que l'un des axes x, y est perpendiculaire à Z_3, soit y cet axe. On a

$$\cos Z_3 y = 0,$$
$$\cos Z_3 x = \sin\psi.$$

Il en résulte

$$A_0 C_2 = B_3 C_3,$$
$$B_0 C_2 = B_3[C_3 + (B_3 - C_3)\sin^2\psi],$$
$$C_2 = B_3 - (B_3 - C_3)\cos^2\psi = C_3 + (B_3 - C_3)\sin^2\psi,$$

d'où

$$\frac{A_0}{B_0} - 1 = \left(\frac{B_3}{C_3} - 1\right)\sin^2\psi.$$

En outre,

$$\cos X_2 Z_3 = \sin\psi\cos\varphi = \varepsilon_{13}\gamma_{11} + \varepsilon_{23}\gamma_{21} + \varepsilon_{33}\gamma_{31},$$
$$\cos Y_2 Z_3 = \sin\psi\sin\varphi = \varepsilon_{13}\gamma_{12} + \varepsilon_{23}\gamma_{22} + \varepsilon_{33}\gamma_{32},$$

De sorte que si l'on pose

$$P = \sqrt{\frac{B_3}{C_3} - 1}\,\varepsilon_{13}, \qquad Q = \sqrt{\frac{B_3}{C_3} - 1}\,\varepsilon_{23}, \qquad R = \sqrt{\frac{B_3}{C_3} - 1}\,\varepsilon_{33},$$

on aura, pour déterminer les paramètres caractéristiques de l'ellipsoïde des vitesses,

$$\sqrt{\frac{A_0}{B_0} - 1}\cos\varphi = P\gamma_{11} + Q\gamma_{21} + R\gamma_{31},$$
$$\sqrt{\frac{A_0}{B_0} - 1}\sin\varphi = P\gamma_{12} + Q\gamma_{22} + R\gamma_{32},$$

A la place de A_0, B_0, on peut introduire, par intermédiaire de A'_1, B'_1, leurs valeurs en fonction des moments. On a en effet

$$\sqrt{\frac{A_0}{B_0} - 1}\cos\varphi = \sqrt{\frac{N_{20} - N_{02}}{N_{02} - N_{20}\tan g^2\varphi}} = \xi,$$
$$\sqrt{\frac{A_0}{B_0} - 1}\sin\varphi = \sqrt{\frac{N_{20} - N_{02}}{N_{02}\cot^2\varphi - N_{20}}} = \eta.$$

Les équations qui déterminent l'ellipsoïde des vitesses prennent

ainsi la forme

$$\xi = P\gamma_{11} + Q\gamma_{21} + R\gamma_{31},$$
$$\eta = P\gamma_{12} + Q\gamma_{22} + R\gamma_{32}.$$

Avec les valeurs ξ et η relatifs aux 48 carrés, Charlier a déduit par la méthode des moindres carrés

$$P = +0,35827,$$
$$Q = -1,57053,$$
$$R = -0,56554.$$

En désignant par $\mathcal{R}_v$, $\mathfrak{D}_v$ les coordonnées du vrai vertex (point où l'axe de Z_3 perce la sphère céleste), on a

$$P = \sqrt{\frac{A_3}{C_3} - 1}\cos\mathcal{R}_v\cos\mathfrak{D}_v,$$
$$Q = \sqrt{\frac{A_3}{C_3} - 1}\sin\mathcal{R}_v\cos\mathcal{R}_v,$$
$$R = \sqrt{\frac{A_3}{C_3} - 1}\sin\mathfrak{D}_v.$$

De là on déduit

$$\sqrt{\frac{A_3}{C_3} - 1} = 1,707; \qquad \mathcal{R}_v = 18^h51^m = 282°,8; \qquad \mathfrak{D}_v = -19°,4.$$

Pour les coefficients de dispersion σ'_1 et σ'_2, (le premier pour les vitesses dans la direction parallèle à celle du vertex, le second pour les vitesses perpendiculaires à cette dernière) on a

$$\frac{A_3}{C_3} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}, \qquad \text{de sorte que} \qquad \sigma'_1 (=) 2\sigma'_2,$$

autrement dit, la vitesse moyenne des astres suivant la ligne des vertex est environ le double de celle dans la direction perpendiculaire à cette dernière.

Pour l'excentricité de l'ellipsoïde des vitesses, on a

$$e = \sqrt{\frac{\sigma_1'^2 - \sigma_2'^2}{\sigma'_1}} = 0,86.$$

En adoptant pour la vitesse du Soleil 20^{km} : sec, on a

$$\sigma'_1 = 31,5 \text{ km : sec} \pm 1,10 \text{ km : sec.},$$
$$\sigma'_2 = 15,84 \text{ km : sec} \pm 0,56 \text{ km : sec.}$$

Il importe maintenant de se rendre compte jusqu'à quel degré l'hypothèse ellipsoïdale satisfait aux observations. En langage statistique, cela revient à examiner l'ordre de grandeur des caractéristiques de la fonction de fréquence d'ordre supérieur au premier, en particulier de voir les valeurs de l'excès et de l'obliquité.

Pour le coefficient d'excès, Charlier a trouvé un nombre négatif et assez fort — 0,206. Rappelons seulement que ce coefficient pour les mouvements propres observés était nettement positif. De même le coefficient d'obliquité est assez fort de sorte que la conclusion suivante paraît légitime.

L'hypothèse ellipsoïdale d'un système galactique unique ne se suffit pas pour rendre un compte exact sur les mouvements propres observés des astres.

L'hypothèse des deux courants stellaires, — En présence des valeurs si notables des coefficients caractérisant la surface de corrélation dans l'hypothèse ellipsoïdale, l'idée s'impose d'essayer une dissociation de cette surface en ses parties composantes. Autrement dit on va admettre que la répartition des mouvements stellaires obéit à une loi de la forme

$$\Phi = N_1\varphi_1 + N_2\varphi_2, \qquad N = N_1 + N_2 \text{ (nombre total des astres)},$$

les fonctions φ_1 et φ_2 étant de la forme

$$\frac{1}{\sigma^2\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(U-U_0)^2+(V-V_0)^2}{2\sigma^2}}.$$

On se trouve ainsi en présence de l'hypothèse des deux courants stellaires de Kapteyn.

On appellera, avec M. Charlier, *courant sphérique* un groupe d'étoiles dont les vitesses linéaires se répartissent suivant la loi de Maxwell. Chaque carré forme ainsi un courant sphérique.

Soit maintenant $\Phi(U, V)$ la fonction de corrélation (supposée du type A) des vitesses linéaires correspondant à un carré. On se propose de trouver deux fonctions de la forme

$$\varphi(U, V) = \frac{1}{\sigma^2\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(U-U_0)^2+(V-V_0)^2}{2\sigma^2}},$$

telles que l'on ait

$$N\Phi(U, V) = N_1\varphi_1(U, V) + N_2\varphi_2(U, V).$$

Le problème général de la dissociation d'une courbe ou d'une surface de corrélation en ses composantes peut être considéré, au point de vue pratique, comme irrésoluble. Cependant, dans certains cas particuliers, on peut y arriver mais toujours au prix de calculs fort longs.

Pour le cas qui nous intéresse, M. Charlier a réussi, par la méthode des moments, à résoudre le problème. Il a déterminé les huit quantités N_1, σ'_1, U_{01}, V_{01}, N_2, σ'_2, U_{02}, V_{02}, en supposant connus les moments relatifs à la fonction $\Phi(U, V)$. Ou a jugé superflu d'insister ici sur les détails du calcul

En appliquant la dissociation de la surface de corrélation à chacun des 48 carrés, M. Charlier a obtenu des résultats négatifs. Pour tous les carrés ou presque, l'un des paramètres σ'_1 ou σ'_2 prenait une valeur imaginaire. En plus, les coefficients des termes du troisième et quatrième ordre avaient des valeurs beaucoup trop fortes.

Tout semble donc indiquer que l'hypothèse des deux courants stellaires n'est pas suffisante pour représenter, d'une manière satisfaisante, les faits relatifs aux mouvements stellaires observés.

Travaux divers de Statistique stellaire. — Depuis une vingtaine d'années de nombreux et importants problèmes astronomiques ont été et continuent à être traités par des procédés que l'on vient d'exposer, tant par M. Charlier lui-même que par ses collaborateurs Il n'existe guère de question dans l'Astronomie stellaire, tel type spectral, grandeur des astres et leur variabilité, distance, mouvement propre, qui ne fut abordée et étudiée par l'école de Lund. Mais si importante que soit cette œuvre au point de vue théorique, il est assez malaisé de se prononcer, à l'heure actuelle, sur sa portée et son efficacité au point de vue pratique. Nos connaissances statistiques sur le monde sidéral sont encore loin d'être suffisantes, tant en précision qu'en nombre, pour que les résultats déduits puissent être considérés comme concluants et définitifs. Aussi doit-on regarder les conclusions tirées de ces

recherches comme de premières approximations seulement sur les phénomènes et la constitution de l'Univers stellaire.

Parmi les problèmes traités, l'étude des distances et la distribution dans l'espace des étoiles du type spectral B, par Charlier, constitue l'œuvre la plus complète et la plus importante de ce genre. On peut dire, c'est l'œuvre modèle pour toutes les recherches effectuées ultérieurement par les élèves de l'école de Lund.

Le résultat le plus remarquable de ce travail est la relation très simple qui relie la distance (r) des étoiles de ce type à leur grandeur apparente (m),

$$r = \mathrm{R} \cdot 10^{0,2m},$$

R étant un paramètre constant *pour cette classe d'étoiles*.

Voici comment Charlier arrive à cette formule.

Soient h l'éclat apparent, r la distance à l'observateur, ρ le rayon et T la température d'un astre. Entre ces quantités on a la relation

$$h = \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 f(\mathrm{T}).$$

On suppose la température donnée si l'on connaît le type spectral. Quant au rayon ρ, il peut avoir des valeurs très différentes, même pour les astres appartenant au même type spectral. La preuve en sont les étoiles géantes et naines dans les types spectraux avancés, tels que K, M et N. Plus faible pour les types spectraux F et G, cette variation dans les valeurs de ρ, d'un astre à l'autre, se réduit au minimum pour les types récents A et en particulier pour B.

On peut, dans ce cas, écrire

$$h = \mathrm{C}\, r^{-2}$$

ou, en faisant intervenir la grandeur m,

$$\mathrm{C}_0\, 10^{-0,4m} = \mathrm{C}\, r^{-2},$$

d'où

$$r = \mathrm{R} \cdot 10^{0,2m}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

La valeur du paramètre R, comme nous l'avons montré, peut être calculée à l'aide des mouvements propres et des vitesses radiales. Pour les étoiles plus brillantes que cinquième grandeur, Charlier a trouvé $\mathrm{R} = 4{,}76$ sir. Ce même calcul a fourni, pour les coordon-

nées de l'Apex,

$$\text{Æ} = 272^{\circ},2 = 18^{h},15 \qquad \text{et} \qquad \text{Ⓓ} = +31^{\circ},9 \quad (\text{Carré } B_8).$$

Connaissant R, on peut calculer la distance de chaque étoile et, par conséquent, leur répartition dans l'espace. On arrive ainsi au résultat que les étoiles du type spectral B forment un amas bien défini, aplati vers le plan galactique. Le centre de gravité de cet amas, que Charlier considère en même temps, comme celui du système galactique entier, est situé dans le carré E_4 par

$$\text{Æ} = 115^{\circ},6 = 7^{h},70 \qquad \text{et} \qquad \text{Ⓓ} = -55^{\circ},6.$$

Le Soleil se trouve environ 4 sir. au nord du plan galactique et à une distance de 18 sir. du centre.

Pour la densité de ces étoiles on a trouvé $\Delta = 0{,}0026$ astres par sir. cubique au centre. Ainsi dans un volume de 1000 sir. cubique on peut compter 2,6 astres du type B. La densité diminue très rapidement au fur et à mesure que l'on s'éloigne du centre. De la discussion de leurs vitesses absolues, on a pu conclure que la surface représentant la répartition des vitesses était un ellipsoïde de révolution, ayant le petit axe perpendiculaire au plan galactique. Les composantes de vitesses moyennes sont de 1,9 sir. dans le plan et de 1,3 dans la direction perpendiculaire à ce plan.

Comme on vient de le dire, la variété des sujets traités et le nombre de mémoires publiés, tant par Charlier que par ses collaborateurs sont très nombreux. Dans l'impossibilité de les analyser séparément et d'une façon détaillée, afin de ne pas trop surcharger le texte, nous nous bornerons à résumer simplement, sous forme d'un aperçu, les divers résultats déduits des considérations statistiques, en ajoutant une liste complète de tous les travaux parus jusqu'à aujourd'hui.

Dans le tableau ci-dessous les colonnes signifient :

(1) Type spectral.
(2) Vitesse du Soleil (en sir.).
(3) Distance moyenne.
(4) Coordonnées de l'Apex.
(5) Paramètre R.

1.	2.		3.	4.			5.	6.	7.		11.
S_p.	Ω.	n.	$M\left(\frac{1}{r}\right)$.	ℝ.	Ⓓ.	n.	R.	M_0.	D.	n.	Calculateurs.
				°	°						
O....	−4,64	23	0,0031	262,2	+35,0	23	4,87	−3,33	0,00002	17	Gyllenberg.
B....	−4,66	336	0,0083	275,9	31,2	694	3,80	−2,95	0,0023.	479	Charlier; Gyllenberg.
A....	−4,17	314	0,0166	266,9	26,2	1281	1,67	−1,11	0,018..	1251	Malmquist; Charlier.
F....	−4,11	142	0,0325	269,0	24,6	508	0,69	+0,81	0,112..	555	Lundhal; Charlier.
G....	−3,96	115	0,0153	264,0	37,5	379	1,32	−0,61	0,012..	416	Fänge; Charlier.
K....	−4,12	351	0,0191	280,3	41,1	1135	1,61	−1,03	0,018..	1142	Krantz; Charlier.
M....	−4,43	67	0,0156	274,2	36,7	190	2,42	−1,92	0,0009.	190	Fänge; Charlier.
N....	(−4,43	74)	0,0016	275,4	+71,6	74	6,74	−4,14	0,000001	74	Gyllenberg.

1.	8.			9.							10.	11.
S_p.	α_1.	α_2.	α_3.	ℝ.	Ⓓ.	ℝ.	Ⓓ.	ℝ.	Ⓓ.	n.	E.	Calculateurs.
				°	°	°	°	°	°			
O....	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	16,6	Gyllenberg.
B....	3,10	1,86	0,50	260,7	− 2,3	348,7	+29,8	180,0	+60,1	694	13,1	Charlier; Gyllenberg.
A....	5,04	2,73	1,99	276,3	11,0	343,5	+62,7	191,6	+24,5	1281	15,5	Malmquist; Charlier.
F....	5,20	3,71	2,87	279,4	−25,0	226,7	+52,5	176,3	−26,1	508	≧12,0	Lundhal; Charlier.
G....	7,11	5,10	3,04	275,9	−20,2	331,1	+57,2	195,6	+24,7	379	≧23,0	Fänge; Charlier.
K....	5,86	3,80	3,16	268,5	− 23,5	324,0	+52,6	191,5	+27,4	1135	≧28,0	Krantz; Charlier.
M....	4,99	2,37	0,97	255,7	−45,6	347,1	− 1,4	258,3	+44,4	190	≧42,1	Fänge; Charlier.
N....	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	91,4	Gyllenberg.

Nota. — R. Les nombres de ce tableau ont été empruntés aux travaux de Gyllenberg, *M. L.*, II, n° 99et Charlier et Gyllenbert, *M. L.*, II, n° 92.

(6) Grandeur absolue.
(7) Densité par sir. cubique.
(8) Grandeur des axes de l'ellipsoïde des vitesses.
(9) Position des axes de l'ellipsoïde des vitesses.
(10) Épaisseur de la Voie lactée.
(11) Calculateur.

Chacune de ces colonnes est suivie d'un chiffre *n* indiquant le nombre d'astres utilisés dans le calcul.

Études sur la statistique stellaire

publiées dans *Meddelanden från Lunds Astronomiska Observatorium.*

Travaux théoriques.

Akesson (O. A.). — N° 73. On the dissection of correlation surfaces.

Charlier (C. V. L.). — N° 4. Researches into the theory of probability.
— N° 16. Statistical mechanics.
— N° 25. Uber das Fehlergesetz, I.
— N° 26. Die zweide Form des Fehlergesetzes, II.
— N° 27. Ueber die Darstellung willkurlicher Funktionen.
— N° 34. Weiteres uber das Fehlergesetz.
— N° 41. Das Strahlungsgesetz, I.
— N° 43. Die strenge Form des Bernoullischen Theorems.
— N° 49. Theorems of Poisson and Lexis.
— N° 50. Homograde and heterograde statistics.
— N^os^ 51-52. Some fundamental problems in the theory of probability.
— N° 55. Das Strahlungsgesetz, II.
— N° 57. Frequency curves of type A in heterograde statistics.
— N° 58. The Correlation function of type A.
— N° 61. Frequency curves of compound functions.
— N° 66. On multiple correlation.
— N° 67. The radiation law applied to stellar photometry.
— N^os^ 69-70. Notes on statistical mechanics.
— N° 71. Convergence of developments in series of type A.
— N° 94. On the method of Laplace for the asymptotic computation of functions.

Esscher (K. S. F.). — N° 97. Some general formula in the theory of multiple correlation.

Jorgensen (N. R.). — N° 64. Sur la fonction de répartition de type B de M. Charlier.

Malmquist (K. G.). — N° 96. Die Berechnung von Schiefheit und Exress in der Verteilung der scheinbaren Magnitude.

— N° 100. On some relations in stellar statistics.

Wicksell (S. D.). — N° 17. The correlation function of type A and the regression of its characteristics.

— N° 74. Some theorems in the theory of probability.

— N° 80. The construction of the curves of equal frequency in case of type A correlation.

— N° 83. On the genetic theory of frequency.

— N° 84. On logarithmic correlation.

— N° 85. On the correlation of acting probabilities.

— N° 91. Multiple correlation and non-linear regression.

— N° 95. Beitrage zum Studium der Bravais'schen Funktion.

Applications a l'Astronomie stellaire.

Akesson (O. A.). — N° 11. The motion and the distribution of the sun-spots

Charlier (C. V. L.). — N° 56. Preliminary statistics of nebulæ and clusters.

— N° 68. On the mean distances and luminosities of stars of different spectral types.

— N° 78. Eine studie über die Analyse der Sternbewegungen.

Charlier (C. V. L.), und Gyllenberg (W.).— N° 8. Constitution of the Milky Way.

— N° 9. The motion of the stars.

— N° 14. The distances and the distribution of the stars of the spectral type B.

— N° 19. Stellar lusters and related celestial phenomena.

— N° 72. Die Bewegung der Sterne verschiedener Spektraltypen.

Fange (B.). — N° 25. On the distances and luminosities of stars of spectral type G.

Gyllenberg (K. W.). — N° 13. Stellar velocity distribution as derived from observations in the line of sight.

— N° 59. On the three axial distribution of the velocities of the stars.

— N° 65. On the absolute motion of 160 parallax-stars.

— N° 75. The distribution in space of stars of the spectral type O.

— N° 90. On the motion and distribution of the long-period variable stars.

— N° 99. On the properties of the red stars and their relation to the spectral series.

Henie (H.). — N° 10. The distribution of the stars to the eleventh magnitude.

Lundall (G. F.). — N° 21. On some properties of the stars of spectral type F.

— N° 77. Preliminary notice on the distances and velocities of the stars of spectral class F.

Malmquist (K. G.). — N° 22. A study of the stars of spectral type A.

— N° 76. The distances and the velocity distribution of the stars of the spectral type A.

Raab (S.). — N° 28. A research on open clusters.

Rasmunsen (N. H.). — N° 26. A research on moving chesters.

Wicksell (S. D.). — N° 12. The general characteristics of the frequency function of stellar movements as derived from the proper motions of the stars.

— N° 60. A general method to determine the stree axes of the velocity. ellipsoid from the proper motions of the stars.

— N° 63. Contributions to the statistics of spectroscopic binary stars).

TROISIÈME PARTIE.

RECHERCHES SUR LES ÉTOILES VARIABLES A COURTE PÉRIODE DU TYPE ALGOL.

Les étoiles du type Algol constituent, avec celles des types β Lyre et δ Cephée, la classe des variables à courte période. Ces trois catégories ne sont fort probablement que trois stades principaux de l'évolution des systèmes binaires. Ainsi, ζ Gémeaux, W Vierge suivies de U P. Renard du type δ Cephée, représenteraient la phase initiale de cette évolution où, par une cause encore inconnue, la dissociation de la nébuleuse originelle vient de commencer. Puis, ce processus s'accentue d'une façon continue (η Aigle, S Flèche) pour en arriver à l'état d'une séparation presque accomplie (U Pégase, β Lyre).

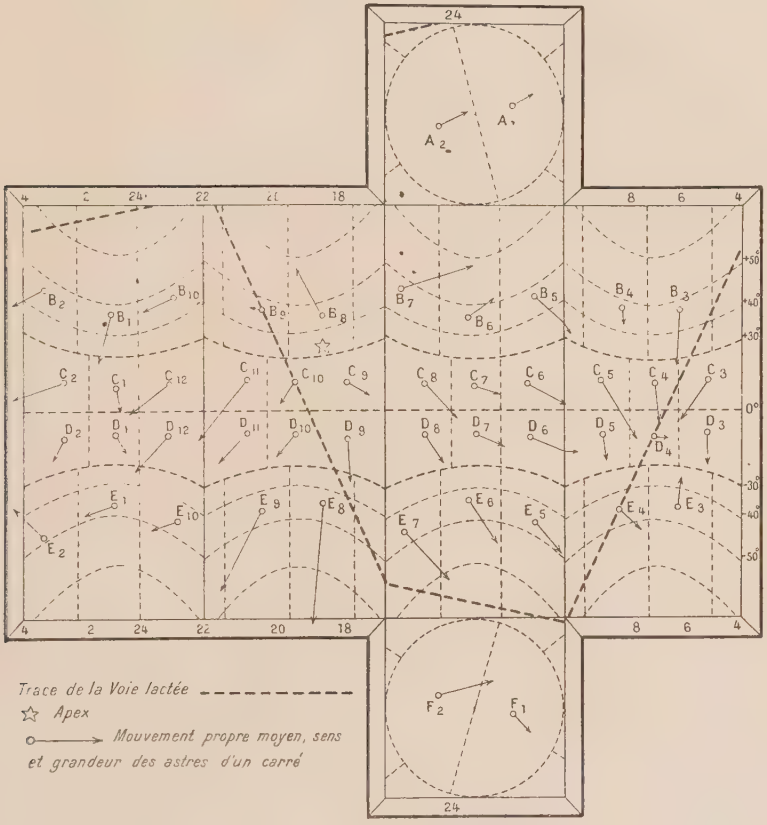
Après la segmentation complète de la nébuleuse (S Voile, S Ecrevisse), commence la condensation des parties composantes. Enfin, dans Algol, cette évolution est terminée depuis longtemps.

Le système se compose de deux corps, de forme sensiblement sphérique, tournant l'un autour de l'autre dans des orbites elliptiques resserrées, dont les plans sont très peu inclinés relativement à la ligne de visée; avec des périodes sensiblement régulières et d'assez courte durée. Les composantes, de dimensions rarement égales, sont d'éclats différents : l'une, souvent la plus grande, presque obscure, tandis que l'autre, l'étoile principale est lumineuse. Les variations apparentes sont dues à l'éclipse, partielle ou totale, de l'astre principal par le compagnon obscur. Pour cette raison, les étoiles du type Algol et β Lyre sont appelées aussi *variables à éclipse*. La courbe de lumière des variables du type Algol est caractérisée par des variations brusques, de courte durée, suivies d'un éclat constant d'une durée beaucoup plus longue.

L'étude des systèmes binaires, en général, et de ceux à éclipse en particulier, constitue actuellement une des parties les plus importantes de l'astronomie stellaire. Elle a fourni des renseignements précieux concernant l'état physique de la structure des

astres en général. Ainsi, nos connaissances relatives aux masses et aux densités stellaires reposent uniquement sur les observations des systèmes binaires.

Fig. 9.



L'avantage que présente les variables à éclipse consiste, d'une part, dans la périodicité presque régulière et de courte durée des phénomènes qui nous intéressent; d'autre part, dans le fait que toutes leurs propriétés, aussi bien géométriques que physiques, se déduisent de leurs courbes de lumière. Il est à peine utile de rappeler à ce sujet les remarquables travaux de H. N. Russel et H. Shapley sur la détermination des éléments orbitaux y compris certains éléments relatifs aux propriétés physiques.

On conçoit l'intérêt d'appliquer la méthode de statistique stellaire à l'étude de ces astres. C'est le but du présent travail dans lequel on a dû, toutefois, se limiter aux variables du type Algol.

Il y a lieu de faire, tout d'abord, une remarque concernant les conclusions que l'on en déduira. Quelle que soit la propriété d'un ensemble d'objets, discutés par des procédés statistiques, les résultats obtenus sont d'autant plus concluants que les mesures de la propriété en question sont plus précises et les objets plus nombreux. Pour ne citer qu'un exemple, rappelons la détermination de l'ascension droite de l'Apex d'Argelander, avec 390 mouvements propres, $\mathrm{A} = 261°,8$ et celle de L. Boss, avec 6000 mouvements propres, $\mathrm{A} = 270°,6$.

Or, les présentes recherches reposent malheureusement sur des données fort incomplètes, tant au point de vue précision qu'au point de vue nombre. Les conclusions tirées des discussions statistiques ne devront êtres considérées que comme une première approximation de la réalité des phénomènes et propriétés considérés.

Le nombre total des étoiles variables du type Algol, connues au début de l'année 1923, était de 149 (1). Dans le courant de cette année trois nouvelles ont été reconnues comme appartenant sûrement à la même catégorie. Dans la liste générale (p. 117), on a réuni les 152 astres, rangés par ordre alphabétique des constellations, avec leurs éléments respectifs : P période en jours et fractions de jour, p durée de l'éclipse en heures (2), M grandeur apparente maxima, m grandeur apparente minima.

Parmi ces éléments, les mieux déterminés sont la grandeur maxima et la période; la grandeur minima, dans certains cas, est encore douteuse [les nombres sont mis entre parenthèses]. Quant à la durée de l'éclipse, elle est, en général, mal déterminée, à quelques heures près, pour un certain nombre de variables encore inconnue.

Études statistiques des éléments déduits des observations : 1° *Fonction de fréquence et de corrélation des grandeurs*

(1) *V. J.*, 1922, et *J. des O.*, 1923.

(2) Dans le cas des deux minima, p se rapporte au minimum primaire.

maxima et minima. — La discussion statistique de ces éléments fondamentaux pour les étoiles variables pourra servir en même temps pour illustrer les méthodes exposées au début de ce travail. Aussi, les calculs numériques seront-ils donnés avec tous les détails nécessaires pour cela.

Le Tableau I de corrélation résume les données relatives aux grandeurs M et m.

TABLEAU I.

m :	2,5.	3,5.	4,5.	5,5.	6,5.	7,5.	8,5.	9,5.	10,5.	11,5.	12,5.	13,5.	14,5.	
M.													<	Σ.
2,5...	1	1												2
3,5...			2											2
4,5...				1										1
5,5...				1	2									3
6,5...					2	2		2						6
7,5...						3	7	2						12
8,5...							2	12	9	3	1			27
9,5...								4	22	14	5			45
10,5...									4	18	10	5	1	38
11,5...											3	3		6
12,5>.												4	1	5
Σ.....	1	1	2	2	4	5	9	20	35	35	19	12	2	147

On a rejeté cinq étoiles pour lesquelles l'une des grandeurs était insuffisamment connue. Pour former le tableau, on a adopté comme unité $1^m,0$; chaque colonne ou ligne contient les grandeurs comprises entre le dixième 0 et 9; ainsi, 4,5 signifie toutes les grandeurs entre 4,0 et 4,9 y compris les limites.

Considérons, par exemple : la fréquence des grandeurs minima

m.	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5	10,5	11,5	12,5	13,5	<
F..	1	1	2	2	4	5	9	20	35	35	19	12	2

et cherchons à en définir la fonction correspondante. On constate immédiatement, à simple vue de la suite, que la courbe représentative ressemble à la « courbe en cloche » (*fig.* 1). La fonction de fréquence correspondante est donc du type A, c'est-à-dire de la forme

$$F(x) = A_0\varphi(x) + A_3\varphi'''(x) + A_4\varphi^{IV}(x) + \dots$$

où

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-b)^2}{2\sigma^2}}.$$

Pour calculer les paramètres b et σ, ainsi que les coefficients A_0, A_3, A_4, ..., on va utiliser le schéma (Tableau II, p. 26), destiné au calcul des moments.

Il s'agit, tout d'abord, de choisir une valeur provisoire m_0 pour la moyenne des grandeurs m. Les calculs seront toujours facilités, si l'on prend cette moyenne de manière à partager le nombre total de la série des fréquences en deux parties égales, autant que cela peut se faire. On adopte ici $m_0 = 11,5$.

En désignant par x l'écart à la moyenne m_0, on a le Tableau suivant :

Tableau II.

x.	x^2.	$F(x)$.	x^3.	x^4.	$xF(x)$.	$x^2F(x)$.	$x^3F(x)$.	$x^4F(x)$.	$(x+1)^4$.	$(x+1)^4F(x)$.
—9.	81	1	—729	6561	— 9	81	— 729	6561	4096	4096
—8.	64	1	—512	4096	— 8	64	— 512	4096	2401	2401
—7.	49	2	—343	2401	— 14	98	— 686	4802	1296	2592
—6.	36	2	—216	1296	— 12	72	— 432	2592	625	1250
—5.	25	4	—125	625	— 20	100	— 500	2500	256	1024
—4.	16	5	— 64	256	— 20	80	— 320	1280	81	405
—3.	9	9	— 27	81	— 27	81	— 243	729	16	144
—2.	4	20	— 8	16	— 40	80	— 160	320	1	20
—1.	1	35	— 1	1	— 35	35	— 35	35	0	0
0.	0	35	0	0	0	0	0	0	1	35
+1.	1	19	+ 1	1	+ 19	19	+ 19	19	16	304
+2.	4	12	+ 8	16	+ 24	48	+ 96	192	81	972
+3.	9	2	+ 27	81	+ 6	18	+ 54	162	256	512
Σ...					—136	776	—3448	23288		13755

Les valeurs des moments de différents ordres des paramètres ainsi que des coefficients de la fonction de fréquence $F(x)$ sont fournies par les relations (*voir* p. 26).

$$\mu'_n = \Sigma x^n F(x), \qquad \nu'_n = \frac{\mu'_n}{\mu'_0} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, 4)$$

avec la vérification

$$\Sigma(x-1)^4 F(x) = \mu'_4 + 4\mu'_3 + 6\mu'_2 + 4\mu'_1 + \mu'_0.$$

le premier membre étant donné par la dernière colonne de ce Tableau.

A l'aide des moments ainsi obtenus, on calcule

$\nu'_1 = b = M - m_0$ et $\sigma^2 = \nu_2 = \nu'_2 - b^2$ (M étant la moyenne vraie),
$\nu_3 = \nu'_3 - 3b\nu'_2 + 2b^3$,
$\nu_4 = \nu'_4 - 4b\nu'_3 + 6b^2\nu'_2 - 3b^4$.

Vérification :

$$\nu'_4 = \nu_4 + 4b\nu_3 + 6b^2\nu_2 + b^4.$$

On a ensuite

$$\beta_3 = -\frac{1}{6}\frac{\nu_3}{\sigma^3}, \qquad \beta_4 = \frac{1}{24}\left(\frac{\nu_4}{\sigma^4} - 3\right).$$

L'application de ces formules, au cas considéré actuellement donne

$\mu'_0 = +147$

$\mu'_1 = -136,$	$\nu'_1 = -0,925,$	$b = -0,925,$
$\mu'_2 = +776,$	$\nu'_2 = +5,279,$	$\sigma = +2,103,$
$\mu'_3 = -3448,$	$\nu'_3 = -23,456,$	$\beta_3 = +0,187,$
$\mu'_4 = +23228,$	$\nu'_4 = +158,422,$	$\beta_4 = +0,081.$

Examinons la signification de ces nombres.

La valeur de b est la quantité dont il faut corriger la moyenne provisoire m_0 pour obtenir la moyenne vraie de la série considérée. σ est moins aisé à définir : pour la loi de Gauss, il correspond à l'écart moyen ; en d'autres termes, σ est un nombre tel que, si N désigne le nombre total des éléments considérés, $\frac{2}{3}$N d'entre eux se trouvent groupés entre les limites $M \pm \sigma$, M étant la valeur moyenne de la propriété en question. On peut dire que σ est un nombre mesurant la condensation des éléments autour de la moyenne.

β_3 ou mieux $S = 3\beta_3$ est le coefficient d'obliquité. Il signifie qu'il y a plus d'éléments, environ $\frac{2}{3}$SN, supérieurs à la moyenne si $S > 0$, ou inférieurs si $S < 0$. Dans le cas présent,

$$\frac{2}{3}SN = 55.$$

En d'autres termes : la valeur la plus probable de la série considérée est décalée de $S\sigma$ vers la droite ou vers la gauche suivant que $S \gtrless 0$.

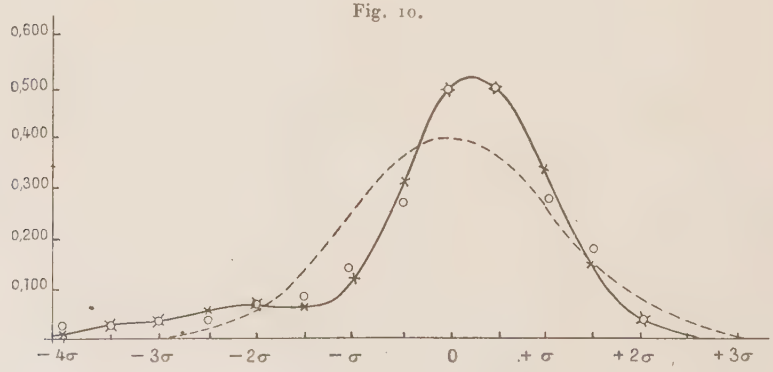
β_4 ou $E = 3\beta_4$ indique le pourcentage excédant la fréquence relative à la moyenne assignée par la loi de Gauss; si Y désigne le nombre d'éléments d'une série à excès E et y le nombre correspondant à la même fourni par la loi de Gauss, on a $Y - y = Ey$.

Connaissant les paramètres de la fonction de fréquence, on peut sans difficulté construire la courbe représentant la répartition des grandeurs minima. A l'aide de la Table des valeurs φ_0, φ_3, φ_4, on trouve :

$x-b$.	$\frac{x-b}{\sigma}$.	φ_3.	φ_4.	φ_0.	$\beta_3\varphi_3$.	$\beta_4\varphi_4$.	$F_1(x)$ = Fréquence Observé.	Calculé.
−8,075	−3,840	+0,0114	+0,0332	0,0003	+0,0021	+0,0026	1	0
−7,075	−3,364	0,0395	+0,0885	0,0014	+0,0073	+0,0071	1	1
−6,075	−2,889	0,0948	+0,1388	0,0061	+0,0177	+0,0112	2	2
−5,075	−2,413	0,1478	+0,0427	0,0217	+0,0276	+0,0034	2	4
−4,075	−1,938	+0,0893	−0,3312	0,0610	+0,0166	−0,0267	4	4
−3,075	−1,462	−0,1728	−0,7202	0,1370	−0,0323	−0,0580	5	3
−2,075	−0,987	−0,4901	−0,4647	0,2451	−0,0916	−0,0374	9	8
−1,075	−0,511	−0,4900	+0,5257	0,3501	−0,0916	+0,0423	20	21
−0,075	−0,036	+0,0430	+1,1928	0,3987	+0,0080	+0,0961	35	35
+0,925	+0,440	+0,4472	+0,6793	0,3621	+0,0836	+0,0547	35	35
+1,925	+0,915	+0,5194	−0,3471	0,2625	+0,0970	−0,0280	19	23
+2,925	+1,391	+0,2247	−0,7377	0,1516	+0,0421	−0,0594	12	9
+3,925	+1,866	−0,0629	−0,4035	0,0699	−0,0117	−0,0324	2	2

En choisissant le nombre σ pour l'unité des abscisses et en multipliant les fréquences ainsi calculées par $\frac{\sigma}{\mu'_0}$ on obtient, pour la comparaison des nombres observés et calculés, la courbe que voici.

Fig. 10.



×, valeurs observées; o, valeurs calculées.

Afin que l'on puisse comparer la courbe ainsi obtenue avec celle correspondant à la loi de Gauss, on a tracé sur la figure ci-dessus cette dernière en pointillé. On constate d'abord, dans le sens des abscisses croissantes, une dissymétrie, mesurée par le coefficient d'obliquité β_3 ; en outre, la courbe s'élève au-dessus de la « courbe en cloche », d'une quantité mesurée par l'excès positif β_4.

Les abscisses x_m, x_c, x_o correspondant respectivement aux ordonnées maxima, centrale et moyenne (*voir* p. 25) ont les valeurs

$$x_m = 11^{m},76, \qquad x_c = 10^{m},97, \qquad x_0 = 10^{m},58.$$

Donc, bien dans l'ordre assigné pour les petits excès, $x_0 < x_c < x_m$, tandis que pour la courbe en pointillé ces trois valeurs se confondent.

Passons à l'étude de la corrélation entre les grandeurs M et m. Toujours à l'aide du Tableau 1, examinons jusqu'à quel degré les séries de grandeurs M et m sont liées entre elles par une correspondance quasi linéaire. Autrement dit, calculons le coefficient de corrélation relatif aux deux groupes de grandeurs. Comme ce calcul est destiné à servir d'exemple pour les autres cas du même genre, nous avons jugé utile à exposer les opérations numériques d'une façon détaillée.

Soient x et y les écarts par rapport à la moyenne des m respectivement des M, F la fréquence. Comme moyenne provisoire on peut adopter pour m $11^{m},5$, comme précédemment et pour M $9^{m},5$. Cela posé, on transformera le Tableau I, en tableau de corrélation comme il suit :

TABLEAU DES CORRÉLATIONS.

	m :	2,5.	3,5.	4,5.	5,5.	6,5.	7,5.	8,5.	9,5.	10,5.	11,5.	12,5.	13,5.	< 14,5.	Σ.
	x :	—9.	—8.	—7	—6.	—5.	—4.	—3.	—2.	—1.	0.	+1.	+2.	+3.	
M.	y.														
2,5	— 7.	1	1												2
3,5	— 6.			2											2
4,5	— 5.				1										1
5,5	- 4.				1	2									3
6,5	— 3.					2	2		2						6
7,5	— 2.						3	7	2						12
8,5	— 1.							2	12	9	3	1			27
9,5	0.								4	22	14	5			45
10,5	+ 1.									4	18	10	5	1	38
11,5	+ 2.											3	3		6
> 12,5	+ 3.												4	1	4
	Σ....	1	1	2	2	4	5	9	20	35	35	19	12	2	147

Pour faciliter l'aperçu des opérations on peut mettre les calculs numériques sous forme de deux tableaux correspondant à x, respectivement à y.

x.	$F(m)$.	$xF(m)$.	$x^2F(m)$.
— 9.....	1	— 9	81
— 8.....	1	— 8	64
— 7.....	2	—14	98
— 6.....	2	—12	72
— 5.....	4	—20	100
— 4.....	5	—20	80
— 3.....	9	—27	81
— 2.....	20	—40	80
— 1.....	35	—35	35
0.....	35	0	0
+ 1.....	19	+19	19
+ 2.....	12	+24	48
+ 3.....	2	+ 6	18
Σ.....	147	—136	+776
Σ : F(m).		—0,925	5,279

y.	F(M).	$yF(M)$.	$y^2F(M)$.
— 7.....	2	—14	98
— 6.....	2	—22	72
— 5.....	1	— 5	25
— 4.....	3	—12	48
— 3.....	6	—18	54
— 2.....	12	—24	48
— 1.....	27	—27	27
0.....	45	0	0
+ 1.....	38	+38	38
+ 2.....	6	+12	24
+ 3.....	5	+15	45
Σ.....	147	—47	479
Σ : F(M).		—0,320	3,258

En introduisant les indices 1 et 2 pour distinguer les nombres qui se rapportent aux grandeurs minima respectivement maxima, on en déduit :

$$b_1 = \frac{\Sigma x F(m)}{\Sigma F(m)} = -\frac{136}{147} = -0{,}925;$$

$$\sigma_1^2 = \frac{\Sigma x^2 F(m)}{\Sigma F(m)} - b_1^2 = \frac{776}{147} - 0{,}856 = 4{,}423;$$

$$\sigma_1 = 2{,}103.$$

$$b_2 = \frac{\Sigma y F(M)}{\Sigma F(M)} = -\frac{47}{147} = -0{,}320;$$

$$\sigma_2^2 = \frac{\Sigma y^2 F(M)}{\Sigma F(M)} - b_2^2 = \frac{479}{147} - 0{,}102 = 3{,}156;$$

$$\sigma_2 = 1{,}776.$$

Enfin, si l'on additionne les valeurs obtenues en multipliant les nombres dans chaque carré du tableau de corrélation par le produit xy correspondant, on trouve pour le produit

$$\Sigma xy F = +545.$$

Or la valeur du coefficient de corrélation est déterminée par la

formule

$$r = \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2}\left(\frac{\Sigma xy\mathrm{F}}{\mathrm{N}} - b_1 b_2\right).$$

On trouve donc, dans le cas présent

$$r = 0{,}913 \pm 0{,}014.$$

Ainsi l'intensité de corrélation entre les grandeurs minima et maxima est notable. On voit, en outre, qu'elle est positive : les nombres qui se correspondent croissent ou décroissent dans les deux séries simultanément.

D'après ce qui a été exposé précédemment, l'utilité de connaître le coefficient de corrélation a surtout de l'importance lorsqu'il s'agit de traiter la question suivante :

Trouver la valeur la plus probable d'un élément, par exemple M, de la première série, correspondant à un élément déterminé m de la deuxième.

Ce problème se résout au moyen du tableau de corrélation.

Remarquons d'abord que chaque ligne ou colonne de ce tableau constitue en elle-même une série statistique, appelons-la série partielle. Par conséquent, chacune d'elles a une moyenne et un coefficient de dispersion, que l'on peut calculer. En effectuant ces calculs d'après les règles connues, on trouve pour les moyennes des séries partielles les nombres suivants :

Moyennes partielles des m. $\left\{\begin{array}{l} -8{,}50;\ -7{,}00;\ -6{,}00;\ -5{,}33;\ -3{,}67; \\ -3{,}08;\ -1{,}41;\ -0{,}56;\ +0{,}50;\ +1{,}50; \\ +2{,}20. \end{array}\right.$

Moyennes partielles des M. $\left\{\begin{array}{l} -7{,}00;\ -7{,}00;\ -6{,}00;\ -4{,}50;\ -3{,}50; \\ -2{,}40;\ -1{,}78;\ -1{,}10;\ -0{,}14;\ +0{,}43; \\ +0{,}79;\ +1{,}92;\ +2{,}00. \end{array}\right.$

Or, d'après une proposition, sur la démonstration de laquelle on ne peut pas insister ici, ces moyennes partielles doivent se trouver sur deux lignes droites, dites droites de régression, d'équations respectives :

$$\mathrm{X} - b_1 = r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - b_2)$$

$$\mathrm{Y} - b_2 = r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - b_1),$$

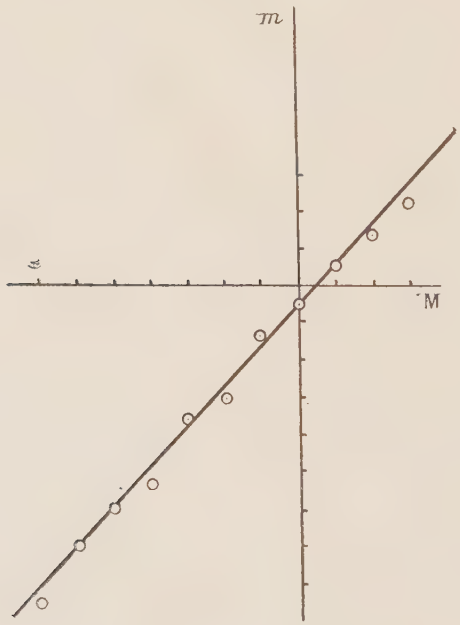
X et Y étant les valeurs les plus probables cherchées correspondant aux valeurs données de y respectivement x et b_1 et b_2 les moyennes partielles relatives aux deux séries.

En substituant dans ces équations les nombres obtenus plus haut on trouve, pour les séries de grandeurs maxima et minima, les droites de régression

$$m + 0{,}925 = 1{,}081(M + 0{,}320) \qquad (M \text{ donné}),$$
$$M + 0{,}320 = 0{,}770(m + 0{,}925) \qquad (m \text{ donné}),$$

Les figures 11 et 12 permettent de juger la façon dont se com-

Fig. 11.

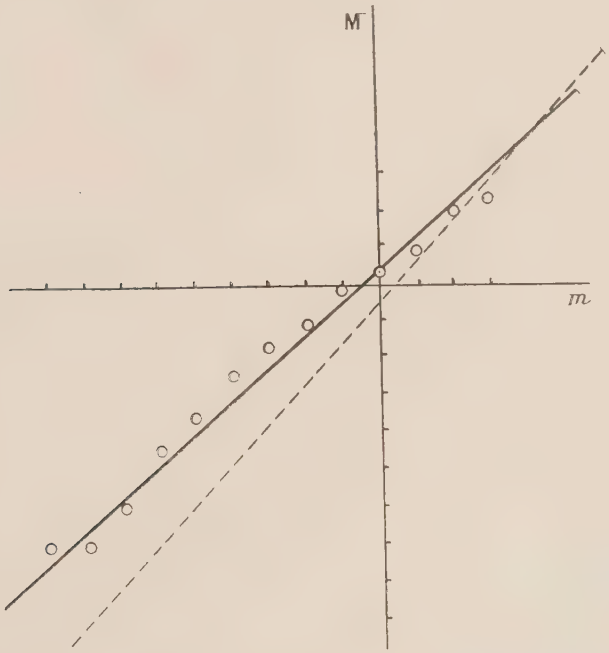


portent les nombres observés (marqués o) et calculés. On voit que les droites de régression font entre elles un angle d'autant plus petit que le coefficient de corrélation est plus voisin de l'unité. Pour $r = 1$, les deux droites se confondent, ce que l'on peut déduire aussi de leurs équations, en y posant $r = 1$.

Il y a lieu ici de faire une remarque concernant l'importance et la signification des droites de régression. D'après ce qui vient d'être

dit, les ordonnées de ces droites fournissent les valeurs les plus probables correspondant aux valeurs des abscisses données. Mais ceci ne s'applique qu'aux valeurs des moyennes partielles, telles qu'elles ont été définies dans le Tableau de corrélation. Les droites de régression ne doivent et ne peuvent pas s'appliquer aux valeurs individuelles tirées au hasard des séries d'observations considérées.

Fig. 12.



Ce qui précède indique suffisamment la marche à suivre dans une discussion d'un ensemble d'observations par les procédés de statistique mathématique. Voici les points principaux et la disposition du calcul :

1° Calcul des paramètres et coefficients de la fonction de fréquence;

2° Construction de la courbe de probabilité et comparaison avec les observations;

3° Calcul du Tableau et du coefficient de corrélation;

4° Calcul des droites de régression.

Fonction de fréquence et corrélation entre l'amplitude et la période. — Le Tableau ci-après donne la distribution de ces deux éléments pour 136 variables.

TABLEAU

P(J).:	—1.	—2.	—3.	—4.	—5.	—6.	—7.	—8.	—9.	—10.	<»	
A. m												Σ.
0,5.	4	7	1	3				1				16
1,0.	5	12	8	3	3	2	1	1	1			36
1,5.	4	3	6	2	6	4	2	2	1		1	31
2,0.	1	5	5	6	1				2	1		21
2,5.		1	5	1	1	3	3			1	1	16
3,0.		2	1	6	3							12
3,5.			1	1								2
>3,5.			1	1								2
Σ.....	14	30	28	23	14	9	6	4	4	2	2	136

On remarquera à premier examen que les séries de fréquence aussi bien des amplitudes (A) que des périodes (P) ne ressemblent point à celles des grandeurs m et M que l'on vient de traiter. En particulier, la répartition des étoiles d'après leur amplitude, soit

A.....	$0^m,5$	$1^m,0$	$1^m,5$	$2^m,0$	$2^m,6$	$3^m,0$	$3^m,5$	$> 3^m,5$
N.....	16,	36,	31,	21,	16,	12,	2,	2

diffère nettement de celle accusée par les courbes usuelles de probabilité. Nous allons montrer que cette série appartient à la famille de courbes du type B. La fonction de fréquence correspondante est de la forme

$$F(x) = B_0\psi(x) + B_1\Delta\psi(x) + B_2\Delta^2\psi(x) + \ldots,$$

où

$$\psi(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}.$$

En faisant coïncider le paramètre λ avec la moyenne des x, le coefficient B_1 s'annule et si, en outre, on néglige les termes d'ordres supérieurs au second, la fonction $F(x)$ s'écrit

$$F(x) = B_0\psi(x) + B_2\Delta^2\psi(x).$$

Le calcul des coefficients B_0, B_2, ainsi que des paramètres carac-

téristiques s'effectue, sans difficulté, à l'aide du Tableau des moments (*voir* p. 26). Aussi suffit-il de donner simplement les résultats. On trouve :

$$\mu'_0 = 136, \quad \nu'_1 = b = \lambda = 2,287$$
$$\mu'_1 = 311, \quad \nu'_2 = 7,905, \quad B_0 = 136$$
$$\mu'_2 = 1075, \quad \nu_2 = \nu'_2 - b^2 = 2,675, \quad B_2 = \frac{1}{2} \cdot 136(\nu_2 - b) = 26,384.$$

Ainsi la répartition calculée F(A) des amplitudes est donnée par l'expression :

$$F(A) = 136\psi(A) + 26,38\psi\Delta^2(A),$$

avec

$$\psi(A) = \frac{(2,287)^A}{A!} e^{-2,287}.$$

Les nombres $\psi(A)$ et $\Delta^2\psi(A)$ correspondant à la valeur du paramètre $\lambda = 2,287$ ont été tirés de la Table de Bortkewitsch (1) reproduite à la fin du Mémoire ML II, n° 4 de Chartier.

On a

					Fréquence = F(A).		
$\psi(A)$.	$\Delta\psi(A)$.	$\Delta^2\psi(A)$.	$B_0\psi(A)$.	$B_2\Delta^2\psi(A)$.	Calc.	Obs.	O − C.
0,1017	+0,1017	+0,1017	13,8	+2,7	16,5	16	−1
0,2323	+0,1306	+0,0289	31,6	+0.8	32,4	36	+4
0,2654	+0,0331	−0,0975	36,1	−2,6	33,5	31	−3
0,2024	−0,0630	−0,0961	27,5	−2,5	25,0	21	−4
0,1158	−0,0866	−0,0236	15,7	−0,6	15,1	16	+1
0,0530	−0,0628	+0,0238	7,2	+0,6	7,8	12	+4
0,0202	−0,0328	+0,0300	2,7	+0,8	3,5	2	−2
0,0066	−0,0136	+0,0192	0,9	+0,5	1,4	2	+1

Les deux dernières colonnes montrent que l'accord entre les fréquences observées et calculées est satisfaisant.

Pour terminer la discussion des amplitudes et périodes, on a calculé le coefficient de corrélation relatif à ces propriétés. Le résultat obtenu, $r = 0,23$, a démontré que ces deux éléments des variables à éclipse n'ont qu'une très faible corrélation sans intérêt.

D'autres propriétés des astres du type Algol ont été également examinées en vue d'établir si elles n'étaient pas liées par des corré-

(1) Bortkewitsch, *Das Gesetz der kleinen Zahlen.*

lations intéressantes : la période et la latitude galactique, la durée de l'éclipse et l'amplitude, et enfin la période et la durée de l'éclipse.

Les deux premières recherches n'ont donné aucun résultat caractérisé.

L'étude de la relation entre la période et la durée de l'éclipse présente au contraire un grand intérêt pour cette catégorie des variables. Le problème n'est d'ailleurs pas nouveau.

Traité pour la première fois par Chandler (1), avec sept étoiles seulement et depuis connu sous le nom de la loi de Chandler, ce problème fut repris et discuté par d'autres, d'abord par K. Pearson, puis par F. Stein. Ce dernier, en partant des données pour 38 variables, a déduit (2), pour le coefficient de corrélation $r = 0,88$. En 1911, Ichinohe, dans ses recherches sur 92 étoiles du type Algol (3), avait confirmé l'existence de la loi de Chandler. Comme expression reliant la période P à la durée D l'éclipse, il a donné l'équation

$$D = 0,082\,P + 0,151.$$

Les coefficients numériques de cette équation furent déterminés par la méthode des moindres carrés.

Récemment, au cours de la rédaction de ce travail, une Note a paru de Leiner (4) dans laquelle l'auteur a résumé les résultats qu'il a obtenus en discutant le même problème pour 126 étoiles. Toujours par la méthode des moindres carrés, il a trouvé comme expression de la loi de Chandler la formule

$$D = 0,0914\,P + 0,110.$$

De la comparaison entre les nombres calculés à l'aide des deux dernières équations d'une part, et les nombres déduits des observations d'autre part, il résulte que la seconde équation donne une meilleure représentation que la première.

De notre côté, nous avons recalculé le coefficient de corrélation au moyen de 124 étoiles. Le résultat déduit est $r = 0,73$. De

---

(1) Chandler, *A. J.*, 7, p. 40.
(2) *M. N.*, t. LXIX, p. 453.
(3) *Tokyo Journal*, t. 27, (Mémoire inconnu à l'auteur).
(4) *A. N.*, t. 216, p. 449-452.

sorte que l'on serait porté à conclure qu'au fur et à mesure que le nombre de données et leur précision augmentent, le coefficient de corrélation va en diminuant. Autrement dit, la loi de Chandler cesserait d'être représentable par une équation linéaire. D'ailleurs les deux équations, d'Ichinohe et de Leiner, ne s'appliquent nullement aux durées et périodes individuelles.

Ce ne sont que des relations entre les moyennes des durées et périodes correspondant aux groupes de plusieurs étoiles.

Recherches statistiques relatives aux mouvements propres des étoiles variables du type Algol. — Les considérations théoriques précédentes ont permis de constater quelle place importante occupe la connaissance des mouvements propres dans la solution des grands problèmes d'Astronomie stellaire. On sait, en effet, que même avec des données fort incomplètes la discussion statistique des mouvements stellaires a réussi à fournir sur le monde sidéral des renseignements importants, paraissant s'approcher de la réalité. C'est ainsi que Herschel déjà était parvenu à révéler l'existence du mouvement solaire en étudiant les déplacements angulaires apparents assez mal connus et relatifs à un très petit nombre d'astres.

Un autre résultat important déduit de ces données est l'existence des groupes de corps célestes animés de mouvements parallèles convergeant vers les différents points de l'espace (groupe du Taureau, Grande Ourse, Persée). En plus de son importance particulière, la connaissance des mouvements propres a le grand avantage sur celles des autres propriétés stellaires de s'améliorer avec le temps. On peut espérer que dans un avenir plus ou moins proche le problème dynamique de l'Univers sidéral sera résolu et les mouvements stellaires soumis à des lois bien déterminées. Les discussions actuelles ne doivent, par conséquent, être considérées que comme des tâtonnements susceptibles soit de nous approcher de la solution générale, soit de nous révéler d'autres voies conduisant vers ce but.

Dans ce qui suit nous allons envisager les variables à éclipse comme une famille spéciale d'étoiles et étudier leurs mouvements angulaires apparents, en examinant deux problèmes principaux : celui des distances et celui de la répartition spatiale. Naturellement

les résultats ne pourront fournir qu'une idée approchée sur l'état réel des caractères étudiés.

Dans la liste ci-après on a réuni les nombres relatifs aux mouvements propres μ des étoiles du type Algol. Malheureusement, même après avoir épuisé toutes les sources disponibles des données en question, on n'a pu avoir que 17 étoiles de μ bien déterminés (1).

N°s.	Nom de l'étoile.	Gr.	$\mathcal{R}$ 1900,0.	$\mathcal{D}$ 1900,0.	μ_α.	μ_δ.	Aut.
			h m s	o ′	s	″	
1.	U Céphée....	6,8	0.53.24	+81.20,3	+0,0040	—0,009	Gr.
2.	RZ Cassiopée.	6,4	2.39.54	+69.12,8	— 0014	+ 010	Kü.
3.	β Persée.....	2,2	3. 1.40	+40.34,2	+ 0006	— 005	Boss
4.	λ Taureau....	3,8	3.55. 8	+12.12,5	— 0004	— 014	Boss
5.	RW Taureau.	8,1	3.57.45	+27.51,0	+ 0031	— 040	Gr.
6.	ε Cocher.....	3,3	4.54.48	+43.40,5	+ 0005	— 013	Boss
7.	VV Orion....	5,2	5.28.27	— 1.13,6	0000	— 007	Boss
8.	BM Orion....	8,0	5.30.21	— 5.27,1	+ 0002	+ 004	Boss
9.	β Cocher.....	2,1	5.52.12	+44.56,2	— 0044	— 005	Boss
10.	RG. Chien ...	5,4	7.14.56	—16.12,4	+ 0128	— 104	Boss
11.	S Voiles.....	7,9	9.29.27	—44.45,9	— 0060	— 010	Cape
12.	δ Balance....	4,9	14.55.38	— 8. 7,2	— 0046	— 011	Boss
13.	W P. Ourse ..	8,4	16.34.50	+86.25,9	+ 0040	— 026	Gr.
14.	U Ophiuchus.	5,3	17.11.27	+ 1.19,2	— 0005	— 026	G.F.
15.	Z Hercule....	7,2	17.53.36	+15. 8,8	— 0005	+ 086	Sch.
16.	U Sagittaire..	6,4	19.14.26	+19.25,9	— 0010	+ 010	A.G.
17.	ZP. Renard...	7,8	19.17.32	+25.23,1	+0,0015	—0,006	Gr.

On va d'abord procéder au calcul du mouvement solaire et de la manière suivante.

Soient U, V, W les composantes, dans le système des coordonnées équatoriales, de la vitesse de l'astre par rapport au Soleil; U′, V′, W′ les composantes de la même vitesse rapportées à un système de coordonnées dont l'axe des Z est dirigé suivant la ligne de visée, l'axe des X dans le sens des ascensions droites croissantes et celui des Y dans le sens des déclinaisons croissantes. En désignant par $\gamma_{m,n}$ les cosinus directeurs des axes des deux systèmes,

(1) Pour U Ophiuchus, l'auteur a déduit les valeurs de μ_α et μ_δ avec les positions de 1917 relevées dans le Catalogue actuellement en préparation pour la publication de M. G. Fayet.

on a

$$\begin{aligned} U'' &= \gamma_{11} U + \gamma_{21} V + \gamma_{31} W, \\ V' &= \gamma_{12} U + \gamma_{22} V + \gamma_{32} W, \\ W' &= \gamma_{13} U + \gamma_{23} V + \gamma_{33} W, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= -\sin\alpha, & \gamma_{21} &= \cos\alpha, & \gamma_{31} &= 0, \\ \gamma_{12} &= -\cos\alpha\sin\delta, & \gamma_{22} &= -\sin\alpha\sin\delta, & \gamma_{32} &= -\cos\delta, \\ \gamma_{13} &= \cos\alpha\cos\delta, & \gamma_{23} &= \sin\alpha\cos\delta, & \gamma_{33} &= \sin\delta. \end{aligned}$$

Les vitesses radiales des étoiles considérées n'étant point connues, la troisième équation n'interviendra pas dans ce qui va suivre.

Introduisons les mouvements propres observés, en posant

$$u' = \mu_\alpha \cos\delta, \qquad v' = \mu_\delta.$$

On aura

$$U' = ru', \qquad V' = rv',$$

r désignant la distance de l'astre à l'observateur. En substituant ces valeurs dans les deux premières équations, et en faisant remarquer que $\gamma_{31} = 0$, on a

$$\begin{aligned} u' &= \gamma_{11}\frac{U}{r} + \gamma_{21}\frac{V}{r}, \\ v' &= \gamma_{12}\frac{U}{r} + \gamma_{22}\frac{V}{r} + \gamma_{32}\frac{W}{r}. \end{aligned}$$

Or, d'après Charlier, r peut s'exprimer en fonction d'un paramètre R et de la grandeur apparente m. On a, en effet,

$$r = R.10^{0,2m}.$$

De sorte que, si l'on pose

$$u = 10^{0,2m} u' \qquad \text{et} \qquad v = 10^{0,2m} v'.$$

u, v étant appelés les composantes du mouvement propre réduit, les équations précédentes deviennent

$$(a) \qquad \begin{cases} u = \gamma_{11}\dfrac{U}{R} + \gamma_{21}\dfrac{V}{R}, \\ v = \gamma_{12}\dfrac{U}{R} + \gamma_{22}\dfrac{V}{R} + \gamma_{32}\dfrac{W}{R}. \end{cases}$$

Voici les quantités $10^{0,2m}$, u', v', u et v pour les étoiles de la liste

précédente :

Nos.	$10^{0},2m$.	u'.	v'.	u.	v.
		"	"	"	"
1....	22,9	+0,0090	—0,009	+0,207	—0,207
2....	19,1	— 0075	+ 010	—0,098	+0,130
3....	2,8	+ 0068	— 005	+0,019	—0,014
4....	5,8	— 0059	— 014	—0,034	—0,081
5....	41,7	+ 0411	— 040	+1,726	—1,680
6....	4,6	+ 0054	— 013	+0,024	—0,059
7....	11,0	0000	— 007	0,000	—0,077
8....	39,8	+ 0030	+ 004	+0,120	+0,160
9....	2,6	— 0467	— 005	—0,121	—0,013
10....	12,0	+ 1844	— 104	+2,213	—1,248
11....	38,0	— 0639	— 010	—2,428	—0,380
12....	9,6	— 0683	— 011	—0,656	—0,106
13....	47,9	+ 0037	— 026	+0,178	—1,248
14....	11,5	— 0075	— 026	—0,086	—0,299
15....	27,5	— 0072	+ 086	—0,202	+2,408
16....	19,1	— 0142	+ 010	—0,185	+0,130
17....	36,3	+ 0203	— 006	+0,731	—0,216

Chaque astre fournit deux équations de condition de la forme (a). L'ensemble traité par la méthode des moindres carrés fournira les valeurs moyennes de U, V, W à condition toutefois que R puisse être considéré comme constant pour toutes les étoiles en question. Puis, en changeant les signes de ces trois quantités, on déduira des équations

$$U = S \cos \text{Æ} \cos \text{Ø}, \qquad V = S \sin \text{Æ} \cos \text{Ø}, \qquad W = S \sin \text{Ø},$$

la position, Æ et Ø, de l'apex et la vitesse S du Soleil.

Pour les étoiles considérées le calcul conduit au système d'équations normales

$$\begin{aligned}
14,939\,\frac{U}{R} - 1,220\,\frac{V}{R} - 1,982\,\frac{W}{R} &= 1'',709,\\
-1,220\,\frac{U}{R} + 7,548\,\frac{V}{R} - 0,544\,\frac{W}{R} &= 2'',506,\\
-1,982\,\frac{U}{R} - 0,544\,\frac{V}{R} + 11,525\,\frac{W}{R} &= -1,227
\end{aligned}$$

dont les solutions sont

$$\frac{U}{R} = -0'',104, \qquad \frac{V}{R} = +0'',307, \qquad \frac{W}{R} = -0'',110.$$

Ceci donne, pour les coordonnées de l'apex et la vitesse du Soleil,

$$\mathcal{A} = 288°,7, \qquad \mathcal{D} = +18°,6 \qquad \text{et} \qquad \frac{S}{R} = +0'',342.$$

Les erreurs moyennes de U, V, W sont relativement assez fortes à cause du manque de données. Quant à l'incertitude des coordonnées de l'apex, elle n'est pas anormale, si l'on tient compte du nombre des étoiles utilisées. En particulier, la déclinaison de l'apex est visiblement trop faible, étant donné que la grandeur moyenne des astres dans la liste est $5^m,8$.

D'après ce qui a été dit dans la partie théorique, on peut, en admettant certaines hypothèses, déduire de ces nombres une valeur pour le paramètre R.

Pour cela, on doit d'abord constater que 12 étoiles sur 17 de mouvements propres connus, et 71 sur 86 de spectre connu de toutes les étoiles variables du type Algol, appartiennent au type spectral $B_5 - A_5$. Or, dans ce cas, il est permis d'admettre, en première approximation du moins, que R est le même pour toutes les variables à éclipse. Ceci revient à admettre que ces étoiles ont toutes le même diamètre. L'hypothèse, évidemment un peu arbitraire, ne doit cependant pas être éloignée de la réalité, si l'on accepte la nouvelle théorie de l'évolution stellaire.

Le paramètre R s'obtient alors facilement à l'aide de la relation

$$\frac{S}{R} = +0'',342.$$

si l'on connaît la valeur de S. Or, Gyllenberg, en discutant les vitesses radiales de 291 étoiles du type spectral A, a trouvé (1) pour cette quantité

$$S = 4,167 \text{ sir.}$$

En adoptant ce nombre, on a

$$R = 0'',206 \times \frac{4,167 \text{ sir.}}{0'',342} = 2,51 \text{ sir.},$$

avec une erreur moyenne

$$\varepsilon(R) = \pm 1,35 \text{ sir.}$$

---

(1) *M. L.*, II, n° 13.

La valeur ainsi trouvée s'accorde bien avec celle obtenue par Malmquist (¹) pour les astres des types spectraux $B_8 - A_2$.

Si ce nombre est exact, une variable du type Algol, de grandeur maxima $0^m,0$, serait située à une disiance de 2,51 sir., c'est à-dire aurait une parallaxe de $0'',082$.

Ayant ainsi la valeur de R on peut calculer la distance individuelle de chaque étoile et, par conséquent, aborder l'étude statistique de leur répartition dans l'espace. Les nombres résultant de ce calcul et qui doivent servir de base pour la discussion, se trouvent résumés dans la liste générale ci-après. Voici la signification des colonnes successives :

(1) Numéro d'ordre.
(2) Nom de l'étoile.
(3) Grandeur maxima.
(4) Grandeur minima.
(5) Période orbitale en jours et fractions du jour.
(6) Durée de l'éclipse en heures.
(7) et (8) $\mathcal{R}$ et $\mathfrak{D}$ pour 1900,0.
(9) Distance de l'astre exprimée en R.
(10), (11), (12) Coordonnées rectangulaires galactiques en R.
(13), (14), (15) Coordonnées rectangulaires équatoriales en siriomètres.
(16) Parallaxe.
(17) Type spectral.

Les étoiles sont rangées par ordre alphabétique des constellations.

(¹) *M. L.*, II, n° 22.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.
N°.	Nom de l'étoile.	M.	*m*.	P.	D.	AR.	Ⓓ.	*r*.	ξ.	η.	ζ.	*x*.	*y*.	*z*.	π.	S.
				J		h h m s	° ′								0″,	
1.	RT Andromède..	9,1	10,3	0,6289	3	23. 6.42	+52.29	66	+ 16	+ 64	— 8	+ 39	— 9	+ 52	0012	—
2.	SY Andromède..	10,7	12,5	34,9091	41	0. 8. 2	+43. 9	139	+ 14	+131	— 44	+101	+ 4	+ 95	0006	—
3.	TT Andromède..	11,3	12,6	2,7651	9	23. 8.44	+45.36	182	+ 49	+170	— 43	+124	— 36	+130	0005	A
4.	TW Andromède.	8,6	10,4	4,1228	9	23.58.10	+32.37	53	+ 8	+ 45	— 25	+ 44	— 0	+ 28	0015	A
5.	UU Andromède..	10,5	13,0	1,4863	9	0.38.31	+30.24	126	+ 1	+107	— 66	+107	+ 18	+ 64	0007	—
6.	VV Andromède..	9,7	10,2	0,9597	—	23.33.45	+35. 0	87	+ 20	+ 76	— 37	+ 71	— 8	+ 50	0009	—
7.	WX Andromède.	10,7	14,0	3,0010	—	0.40.17	+28.12	139	— 0	+116	— 77	+121	+ 21	+ 66	0006	—
8.	R Autel.....	6,8	7,8	4,4251	9	16.31. 4	—56.48	23	+ 11	— 20	— 3	— 5	— 12	— 19	0036	
9.	RW Autel.....	7,6	10,6	4,3677	12	17.26.17	—57. 5	33	+ 17	— 27	— 8	— 3	— 18	— 28	0025	—
10.	δ Balance.....	4,8	5,9	2,3274	10	14.55.38	— 8. 7	9	+ 5	— 5	+ 6	— 7	— 6	— 1	0089	A
11.	SS Balance.....	9,6	10,6	1,4379	—	15.43.27	—15.14	83	+ 57	— 46	+ 39	— 45	— 67	— 22	0010	—
12.	SU Bouvier.....	10,5	11,0	1,5611	9	14.25. 4	+32.35	126	+ 47	+ 15	+ 32	— 86	— 63	+ 68	0007	—
13.	SS Bouvier.....	10,0	10,5	7,6055	19	15. 9.43	+38.55	100	+ 47	+ 27	+ 30	— 53	— 57	+ 63	0008	—
14.	RW Capricorne.	9,2	10,7	3,392	7	20.12.14	—17.59	69	+ 61	— 7	— 33	+ 36	— 55	— 22	0012	A
15.	X Carène.....	7,9	8,7	0,5413	—	8 .29. 1	—58.53	38	— 17	— 33	— 7	— 12	+ 16	+ 33	0022	A
16.	SS Carène.....	12,3	13,0	3,3008	—	10.54.11	—61.23	289	— 62	—282	— 10	—133	+ 41	+254	0003	(A)
17.	ST Carène.....	9,3	9,4	0,9017	—	10.12.30	—59.43	72	— 22	— 69	— 4	— 33	+ 17	+ 62	0011	A
18.	1 H Cassiopée....	4,9	5,0	6,0663	—	23.25.24	+58. 0	10	+ 2	+ 9	— 0	+ 5	— 1	+ 8	0082	B3
19.	RX Cassiopée....	8,6	9,3	32,315	—	2.58.49	+67.11	53	— 12	+ 51	+ 8	+ 15	+ 13	+ 48	0015	K0
20.	RZ Cassiopée....	6,4	7,6	1,1953	6	2.39.54	+69.13	19	— 3	+ 18	+ 3	+ 5	+ 5	+ 18	0044	A2
21.	SX Cassiopée....	8,8		36,5668	—	0. 5.30	+54.20	58	+ 5	+ 57	— 8	+ 33	+ 1	+ 47	0014	A2
22	TV Cassiopée....	7,3	8,3	1,8126	8	0.13.55	+58.35	29	+ 17	+ 29	— 2	+ 15	+ 1	+ 25	0028	B9
23.	TW Cassiopée...	8,3	8,9	2,8567	6	2.37.37	+65.18	46	— 9	+ 45	+ 5	+ 15	+ 12	+ 42	0018	B9
24.	TX Cassiopée....	8,8	9,3	2,9269	16	2.44.17	+62.22	58	— 14	+ 56	+ 4	+ 20	+ 17	+ 51	0014	B4
25.	RZ Centaure....	8,5	9,0	1,8759	—	12.55.37	—64. 5	50	+ 2	— 50	— 2	— 21	— 6	— 45	0016	A
26.	SS Centaure....	8,7	10,2	2,4787	—	13. 7. 9	—63.37	55	+ 3	— 55	— 2	— 24	— 7	— 49	0015	B9

1. N°.	2. Nom de l'étoile.	3. M.	4. *m.*	5. P.	6. D.	7. AR.	8. Ⓓ.	9. *r.*	10. ξ.	11. η.	12. ζ.	13. *x.*	14. *y.*	15. *z.*	16. π.	17. S.
				J		h m s	° ′								o″,	
27.	SU Centaure....	8,7	9,6	5,3544	—	11. 6.34	—47.18	55	— 15	— 52	+ 11	— 36	— 9	— 40	0015	F2
28.	SW Centaure....	9,1	11,4	5,2194	—	12.12.30	—49.11	66	— 5	— 64	+ 14	— 43	— 3	— 50	0013	A
29.	SY Centaure.....	9,9	10,8	6,6313	2	13.35. 3	—61.16	96	+ 11	— 85	— 0	— 42	— 18	— 84	0009	A
30.	SZ Centaure....	8,2	8,8	4,1080	17	13.43.51	—58. 0	44	+ 6	— 43	+ 2	— 21	— 6	— 37	0019	A
31.	U Céphée.....	6,8	9,2	4,2929	12	0.53.24	+81.20	23	— 0	+ 22	+ 8	+ 3	+ 1	+ 23	0036	A
32.	RS Céphée.....	10,2	11,9	12,4204	10	4.48.34	+80. 6	110	— 17	+100	+ 43	+ 6	+ 18	+109	0008	Ap
33.	RS Ch. de chasse.	7,8	8,9	4,7980	5	13. 5.39	+36.28	36	+ 3	+ 5	+ 36	— 28	— 8	+ 21	0022	F8
34.	β Cocher.....	2,1	2,2	3,9601	6	5.52.12	+ 44.56	3	2	+ 2	+ 1	— 0	+ 2	+ 2	0017	Ap
35.	ε Cocher.....	3,3	4,0	9905,	727j	4.54.48	+43.41	5	— 3	+ 4	+ 0	+ 1	+ 3	+ 3	0177	F8p
36.	RY Cocher.....	11,0	(12,5)	2,7254	8	5.11.32	+38.13	159	— 116	+112	+ 5	+ 26	+123	+ 98	0005	—
37.	RZ Cocher.....	10,5	12,2	3,0106	11	5.42.53	+31.40	126	—104	+ 71	+ 8	+ 8	+107	+ 66	0007	(A)
38.	WW Cocher	6,0	6,5	1,3625	5	6.25.56	+32.32	16	— 13	+ 8	+ 3	— 2	+ 13	+ 9	0051	—
39.	U Colombe.....	9,6	10,2	1,2462	—	6.11.12	—33. 3	83	— 69	— 36	— 29	— 3	+ 70	— 46	0010	(A)
40.	U Couronne bor.	7,5	8,7	3,4522	11	15.14. 7	+32. 1	32	— 17	+ 5	+ 26	— 18	20	+ 17	0026	A
41.	RW Cour. bor...	9,3	9,8	0,7264	4	15.35.10	+29.57	72	+ 43	— 11	+ 57	— 37	51	+ 36	0011	-
42.	AE Cygne.....	10,8	11,4	0,9692	6	21. 9. 0	+30.20	144	— 99	+ 99	— 32	+ 91	— 85	+ 73	0006	-
43.	BO Cygne.....	11,4	12,3	3,5124	—	21.45.10	+40.40	191	— 99	—159	— 34	+ 120	— 80	+124	0004	—
44.	Y Cygne.....	6,9	7,5	2,9963	8	20.48. 4	+34.17	24	+ 17	+ 17	3	+ 13	— 15	+ 13	0034	A
45.	SW Cygne.....	9,1	11,8	4,5728	13	20. 3.50	+46. 1	66	+ 43	+ 50	— 8	+ 24	— 40	+ 48	0012	A
46.	SY Cygne.....	10,9	13,2	6,0056	19	19.42. 7	+32.28	152	—123	+ 88	+ 8	+ 56	—116	+ 82	0005	—
47.	UW Cygne.....	10,5	13,1	3,4508	11	20.19.36	+42.55	126	+ 83	+ 95	+ 6	+ 53	— 76	+ 86	0007	A
48.	UZ Cygne.....	10,1	12,0	31,3062	60	21.55.14	+43.52	105	+ 49	+ 91	— 16	+ 65	— 39	+ 73	0008	A
49.	VV Cygne.....	12,8	13,5	1,4771	5	21. 2. 3	+45.23	363	+207	+298	— 11	+182	—178	+258	0002	—
50.	VW Cygne.....	9,9	11,8	8,4304	18	20.11. 4	+34.12	96	+ 73	+ 62	2	+ 43	66	+ 54	0009	A
51.	WW Cygne.....	9,4	12,3	3,3177	13	20. 0.36	+ 41.18	76	+ 53	+ 53	+ 6	+ 29	— 49	+ 50	0010	Ap
52.	ZZ Cygne.....	10,4	11,5	0,6286	4	20.20.40	+46.36	121	+ 75	+ 93	+ 10	+ 48	— 68	+ 88	0007	A

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.
N°.	Nom de l'étoile.	M.	*m*.	P.	D.	AR.	D.	*r*.	ξ.	η.	ζ.	*x*.	*y*.	*z*.	π.	S.
				J		h h m s	° ′								o″,	
53.	W Dauphin.....	9,4	12,1	4,8060	17	20.33. 7	+17.56	76	+ 64	+ 36	— 19	+ 45	— 57	+ 24	0010	A
54.	RR Dauphin.....	10,5	11,7	4,5995	11	20.38.52	+13.55	126	+106	+ 55	— 39	+ 78	— 95	+ 30	0007	A
55.	Z Dragon.....	10,5	13,1	1,3574	6	11.39.50	+72.48	126	— 10	— 90	+ 88	— 37	+ 4	+121	0007	A5
56.	RR Dragon.....	10,0	13,0	2,8311	7	18.40.54	+62.35	100	+ 46	+ 79	+ 42	+ 8	— 45	+ 85	0008	A
57.	RX Dragon.....	9,9	10,4	1,8932	4	19. 1. 8	+58.35	96	+ 50	+ 75	+ 34	+ 13	— 48	+ 81	0008	F
58.	RZ Dragon.....	10,0	10,8	0,5509	—	18.21.49	+58.50	100	+ 52	+ 74	+ 44	+ 5	— 52	+ 86	0008	A
59.	SX Dragon.....	9,5	11,8	5,1693	18	18. 2.25	+58.20	79	+ 41	+ 56	+ 45	+ 1	— 42	+ 68	0010	A
60.	TW Dragon.....	7,3	8,9	2,8065	10	15.32.24	+64.14	29	+ 9	+ 19	+ 20	— 8	— 10	+ 26	0030	B9
61.	UZ Dragon.....	9,0	9,8	1,6307	—	19.26. 8	+68.44	63	+ 22	+ 54	+ 23	+ 8	— 22	+ 59	0013	—
62.	S Écrevisse.....	8,0	10,1	9,4846	21	8.38.14	+19.24	40	— 33	— 3	+ 23	— 24	+ 29	+ 13	0020	A
63	RU Écrevisse....	10,1	11,7	10,1727	16	8.31.38	+23.55	105	— 85	+ 17	+ 60	— 59	+ 76	+ 43	0008	—
64.	RY Écrevisse....	12,5	15,3	1,0929		8.34.10	+20.11	317	+262	+ 30	+177	—184	+231	+111	0003	—
65.	W Ecu.....	9,5	10,2	10.2698	30	18.18.54	—13.43	79	+ 77	— 20	— 2	+ 6	— 77	— 19	0010	—
66.	RS Ecu.....	8,9	9,8	0,6644	5	18.43.40	—10.21	60	+ 59	— 9	— 5	+ 12	— 59	— 11	0014	F
67.	RZ Ecu.....	7,5	8,9	15,191.	77	18.21. 5	— 9.16	32	+ 31	— 6	— 0	+ 3	— 31	— 5	0026	B3
68.	RU Eridan.....	8,9	9,7	0,6322	—	3.50. 7	—15.14	60	— 43	+ 4	— 42	+ 31	+ 49	— 16	0014	—
69.	RY Eridan.....	10,0	10,9	4,99..	10	3.54.27	—17.31	100	— 72	+ 3	— 70	+ 50	+ 81	— 30	0008	—
70.	RZ Eridan.....	8,3	9,5	19,64..	—	4.39. 3	—10.52	46	— 39	+ 3	— 24	+ 16	+ 42	— 9	0018	—
71.	U Flèche.....	6,4	9,2	3,3806	12	19.14.26	+19.26	19	+ 18	+ 7	+ 1	+ 6	+ 17	+ 7	0040	B8
72.	RU Gémeaux....	12,0	13,0	8,6707	27	7.21. 0	+21.38	251	- 228	+ 63	+ 80	- 86	+218	+ 93	0003	—
73.	RW Gémeaux...	9,8	11,9	2,8655	13	5.55.24	+23. 8	91	— 82	+ 39	+ 3	+ 2	+ 84	+ 36	0009	A
74.	RX Gémeaux....	8,8	9,5	12,2087	—	6.43.38	+33.22	58	- 48	+ 28	+ 16	- 9	+ 47	+ 32	0014	—
75.	RY Gémeaux....	8,9	(10,1)	9,3005	—	7.21.42	+15.52	60	— 57	+ 10	+ 17	— 21	+ 54	+ 16	0014	—
76.	SV Gémeaux....	10,0	11,3	4,0060	—	5.54.33	+24.28	100	— 89	+ 45	+ 4	+ 2	+ 91	+ 41	0008	—
77.	SX Gémeaux....	10,8	11,5	1,3669	—	6.22...	+20.37	144	— 93	+ 35	+ 10	— 13	+134	+ 50	0006	—
78.	TX Gémeaux.....	9,6	10,4	2,8001	9	7.30.16	+17. 8	83	— 77	+ 13	+ 27	— 31	+ 73	+ 24	0010	—

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.
N°.	Nom de l'étoile.	M.	*m.*	P.	D.	AR.	(D).	*r.*	ξ.	η.	ζ.	*x.*	*y.*	*z.*	π.	S.
				J	h	h m s	° ′								0″,	
79.	Y Girafe.....	9,7	11,7	3,3056	10	7.27.46	+76.18	87	— 20	+ 73	+ 44	— 8	+ 19	+ 85	0009	[A]
80.	SS Girafe.....	10,6	11,8	4,8244	21	7. 4. 0	+73.30	132	— 37	+110	+ 63	— 10	+ 36	+127	0006	[A]
81.	R G. Chien	5,4	6,0	1,1360	6	7.14.56	—16.12	12	— 11	— 4	— 0	— 4	+ 11	— 3	0069	F
82.	RW G. Ourse...	10,3	11,4	7,3284	14	11.35.24	+52.34	115	— 20	+ 49	+102	— 69	+ 8	+ 91	0007	—
83.	W Grue.....	9,5	10,0	1,4760		22.35.26	—44.22	79	+ 29	— 26	— 69	+ 53	— 21	— 56	0010	—
84.	Z Hercule.....	7,1	7,8	3,9928	11	17.53.36	+15. 9	26	+ 25	+ 4	+ 8	— 1	— 25	+ 7	0032	F
85.	RX Hercule.....	7,0	7,5	1,7786	5	18.26. 1	+12.33	25	+ 24	+ 4	+ 4	+ 3	— 24	+ 6	0033	B9
86.	SZ Hercule.....	9,5	11,0	0,8181	4	17.35.57	+33. 1	79	+ 64	+ 29	+ 37	— 7	— 66	+ 43	0010	
87.	TT Hercule.....	8,9	9,5	20,755	48	16.49.55	+17. 0	60	+ 51	+ 28	— 15	+ 18	— 55	+ 18	0014	—
88.	TU Hercule.....	9,5	11,7	2,2671	8	17. 9.46	+30.50	79	+ 63	+ 24	+ 42	— 15	— 67	+ 41	0010	A
89.	TX Hercule.....	8,3	9,0	2,0589	4	17.15.27	+42. 0	46	+ 32	+ 21	+ 25	— 6	— 33	+ 31	0018	A2
90.	UX Hercule.....	8,2	9,3	1,5489	5	17.49.41	+16.58	44	+ 41	+ 7	+ 14	— 2	— 42	+ 13	0019	—
91.	RX Hydre f.....	9,0	11,5	4,5633	9	9. 0.47	— 7.52	63	— 51	— 25	+ 28	— 44	+ 44	— 9	0013	—
92.	SX Hydre f.....	8,6	12,7	2,8957	—	13.39. 2	—26.17	53	— 0	— 43	+ 30	— 46	— 8	— 23	0015	—
93.	RT Lézard.....	9,1	10,2	5,0739	—	21.57. 4	+43.24	66	+ 31	+ 58	— 11	+ 42	— 25	+ 46	0013	G5
94.	RW Lézard	10,2	11,2	5,1849	—	22.40.36	+49. 8	110	+ 36	+102	— 17	+ 68	— 24	+ 84	0007	
95.	SS Lézard	8,4	9,2	1,2015	7	22. 0.43	+45.56	48	+ 16	+ 44	— 10	+ 32	— 11	+ 35	0017	—
96.	RU Licorne.....	9,8	10,3	0,8962	5	6.49.22	— 7.28	91	— 91	— 12	— 2	— 19	+ 89	— 18	0009	
97.	RW Licorne	8,7	10,4	1,9061	8	6.29.18	+ 8.54	55	— 55	+ 9	+ 2	— 7	+ 54	+ 8	0015	A
98.	Y Lion.....	9,4	12,1	1,6861	5	9.31. 5	+26.41	76	50	+ 8	+ 57	— 54	+ 41	+ 34	0011	A
99.	RT Lion.....	9,9	10,7	7,448	—	9.39.47	+20.22	96	— 63	— 0	+ 72	— 74	+ 52	+ 33	0009	—
100.	RW Lion	11,7	13,2	1,6825	4	10.34.24	+ 9.31	219	—112	— 55	+180	—202	+ 79	— 37	0004	—
101.	RV Lyre.....	11,6	13,5	3,5991	9	19.12.31	+32.15	209	+176	+111	+ 29	+ 54	—167	+111	0004	A
102.	TT Lyre.....	9,4	11,6	5,2437	17	19.24.20	+41.30	76	+ 55	+ 49	+ 14	+ 21	— 53	+ 50	0011	A
103.	TZ Lyre.....	10,5	10,9	0,5289	2	18.12.37	+41. 6	126	+ 95	+ 68	— 49	+ 5	— 95	+ 83	0007	
104.	UZ Lyre.....	9,8	11,5	1,8914	7	19.17.39	+ 37.45	91	+ 71	+ 55	+ 16	+ 24	— 68	+ 56	0009	—

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.
N°.	Nom de l'étoile.	M.	*m*.	P.	D.	R.	D.	*r*.	ξ.	η.	ζ.	*x*.	*y*.	*z*.	π.	S.
				J		h m s	° ′								o″,	
105.	Y Mach. pneum..	9,1	9,9	3,0519	10	10. 4. 9	− 34.41	66	− 34	− 53	+ 20	− 48	+ 26	+ 38	0013	—
106.	U Ophiuchus....	5,7	6,4	1,6774	8	17.11.27	+ 1.19	14	+ 13	− 2	+ 5	− 3	+ 14	+ 0	0059	B_8
107.	RV Ophiuchus...	9,5	11,5	3,6871	5	17.29.45	+ 7.19	79	+ 75	− 2	+ 25	− 10	− 78	+ 10	0010	A
108.	RZ Ophiuchus...	9,7	10,5	261,97	18j	18.40.55	+ 7. 7	87	+ 87	+ 16	+ 4	+ 16	− 85	+ 11	0009	G_8
109.	SW Ophiuchus..	9,2	10,0	2,4458	−	16.11. 6	− 6.44	69	+ 55	− 27	+ 33	− 31	− 61	− 8	0012	—
110.	SX Ophiuchus...	10,5	11,2	2,0633	5	16.12.34	− 6.25	126	+100	− 48	+ 59	− 57	−112	− 14	0007	-
111.	SZ Ophiuchus...	10,0	11,5	7,4170	12	17. 9.38	− 7.57	100	+ 92	− 30	+ 27	− 22	− 97	− 14	0008	—
112.	WZ Ophiuchus..	8,9	10,1	2,0919	5	17. 1.48	+ 7.55	60	+ 54	− 4	+ 26	− 15	− 58	+ 8	0014	—
113.	Z Orion.....	9,6	11,0	5,2031	−	5.50.11	+13.40	83	− 79	+ 26	− 6	+ 3	+ 81	+ 20	0010	A
114.	BM Orion.....	(8,5)	(9,5)	6,4754	−	5.30.21	− 5.27	50	− 48	+ 11	− 11	+ 7	+ 50	+ 5	0016	—
115.	VV Orion.....	5,2	5,6	1,4854	-	5.28.27	− 1.14	11	− 10	+ 1	− 3	+ 2	+ 11	− 0	0074	B_2
116.	TY Pégase.....	9,4	11,6	6,1845	−	23.24.54	+13. 0	76	+ 24	+ 48	− 54	+ 72	− 11	+ 18	0011	—
117.	UX Pégase.....	10,0	11,0	3,0892	−	22.23.44	+17.31	100	+ 53	+ 64	− 56	+ 87	− 39	+ 30	0008	—
118.	VW Pégase.....	9,9	10,6	2,6428	3	22.51.40	+32.42	96	+ 36	+ 80	− 39	+ 76	− 24	+ 52	0009	—
119.	β Persée.....	2,2	3,4	2,8673	9	3. 1.40	+40.34	3	− 1	+ 2	− 0	+ 1	+ 2	+ 2	0294	B_8
120.	Z Persée.....	9,6	12,3	3,0564	10	2.33. 7	+41.46	83	− 29	+ 75	− 23	+ 48	+ 38	+ 56	0010	A
121.	RT Persée.....	10,6	12,0	0,8494	5	3.16.45	+46.13	132	− 58	+118	− 17	+ 59	+ 69	+ 95	0006	—
122.	RV Persée.....	10,7	12,9	1,9735	17	4. 4.11	+34. 0	138	− 88	+102	+ 28	+ 55	+101	+ 77	0006	A
123.	RW Persée.....	8,8	11,0	13,1989	24	4.13.20	+42. 4	58	− 35	+ 46	− 5	+ 19	+ 38	+ 39	0014	A
124.	RY Persée.....	8,2	10,6	6,8636	24	2.38.59	+47.43	44	− 14	+ 41	− 7	+ 23	+ 19	+ 32	0019	A_2
125.	ST Persée.....	9,7	11,8	2,6484	9	2.53.43	+38.48	87	− 37	+ 75	− 24	+ 49	+ 47	+ 55	0009	A
126.	WY Persée.....	11,0	13,7	3,3271	8	3.31.38	+42.21	159	− 80	+135	− 25	+ 72	+ 94	+107	0005	—
127.	S P. Cheval.....	8,4	10,3	3,436	−	20.52.14	+ 4.42	48	+ 40	+ 16	− 21	+ 33	+ 35	+ 39	0017	—
128.	T P. Lion.....	9,5	12.0	3,0199	10	9.42.33	+33.45	79	− 46	+ 17	+ 63	− 55	+ 37	+ 45	0010	A

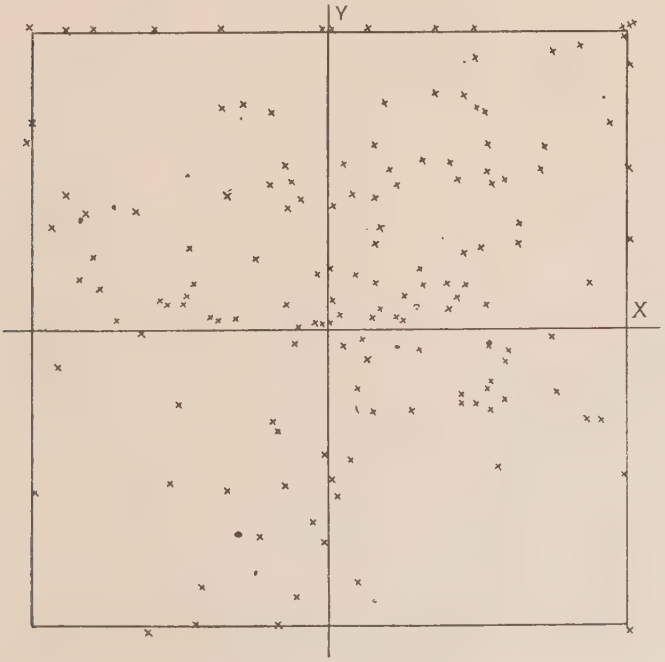
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.
N°.	Nom de l'étoile.	M.	*m*.	P.	D.	AR.	D.	*r*.	ξ.	η.	ζ.	*x*.	*y*.	*z*.	π.	S.
				J		h h m s	° ′								o″,	
129.	Z P. Renard	7,8	9,4	2,4549	—	19.17.32	+25.23	36	+ 32	+ 16	+ 7	+ 11	— 31	+ 16	0022	A
130.	RR P. Renard...	9.5	10,8	5,0513	11	20.50.32	+27.32	79	+ 60	+ 50	+ 18	— 48	— 52	+ 37	0010	A
131.	RS P. Renard...	7,3	8,0	4,4778	11	19.13.25	+22.16	29	+ 27	+ 12	+ 5	+ 8	— 26	+ 11	0028	A
132.	W P. Ourse.....	8,4	9,3	1,7012	—	16.34.50	+86.26	48	+ 2	+ 42	+ 24	— 1	— 3	+ 48	0017	G
133.	W Poisson austr.	10,0	11,5	8,18	—	22. 2. 8	—33.20	100	+ 53	— 18	— 83	+ 73	— 41	— 55	0008	—
134.	Y Poissons.....	9,0	12,4	3,7658	—	23.29.20	+ 7.22	63	+ 19	+ 35	— 49	+ 62	— 8	+ 8	0013	A
135.	RR Poupe.....	9,4	10,5	6,4298	14	7.43. 5	—41. 8	76	— 55	— 52	— 10	— 25	+ 52	— 50	0011	A
136.	AI Sagittaire....	12,3	(13,8)	8,7695	22	18.10.42	—21.36	289	+266	—110	— 20	+ 12	—269	—107	0003	
137.	RS Sagittaire...	6,1	6,8	2,4157	13	18.10.59	—34. 9	17	+ 14	— 9	— 3	+ 1	— 14	— 9	0048	A
138.	SX Sagittaire...	8,6	9,4	2,0769	—	18.39.40	—30.36	53	+ 45	— 24	— 13	+ 8	— 45	— 27	0015	A_5
139.	WX Sagittaire...	9,0	10,6	2,1291	5	17.53.34	—17.24	63	+ 59	— 22	+ 2	— 2	— 60	— 19	0013	—
140.	WY Sagittaire...	8,7	10,1	4,6708	—	17.54.55	—23. 1	55	+ 49	— 23	— 1	— 1	— 50	— 21	0015	—
141.	XY Sagittaire...	9,8	11,3	2,023	—	18. 5.19	—16.29	91	+ 87	— 29	— 1	+ 2	— 88	— 26	0009	—
142.	XZ Sagittaire....	8,5	10,8	3,2755	—	18.15.57	—25.17	50	+ 45	— 21	— 6	+ 3	— 45	— 22	0016	—
143.	YY Sagittaire...	8,8	9,7	1,3145	7	18.38.43	—19.30	57	+ 54	— 17	— 9	+ 9	— 54	— 19	0014	—
144.	λ Taureau	3,8	4,2	3,9529	11	3.55. 1	+12.12	6	— 4	+ 3	— 3	+ 3	+ 5	+ 1	0138	B_3
145.	RW Taureau....	7,9	11,3	2,7688	8	3.57.45	+27.51	38	— 25	+ 26	— 11	+ 17	+ 29	+ 18	0022	B_5
146.	SV Taureau.....	9,4	10,1	4,3338	10	5.45.49	+28. 5	76	— 65	+ 39	+ 3	+ 4	+ 67	+ 36	0011	A
147.	V Toucan.....	10,0	11,8	0,8709	4	0.48.10	—72. 3	100	— 1	— 70	— 71	+ 29	+ 6	— 95	0008	-
148.	X Triangle.....	8,5	10,9	0,9716	6	1.54.52	+27.24	50	— 14	+ 40	— 27	+ 39	+ 22	+ 23	0016	A_0
149.	RY Verseau.....	9,2	10,2	1,9671	6	21.14.51	—11.14	69	+ 53	+ 8	— 44	+ 51	— 45	— 14	0012	—
150.	S Voiles.....	7,8	9,2	5,9336	15	9.29.24	—44.46	36	— 19	— 31	+ 3	— 20	+ 16	— 25	0022	A
151.	RR Voiles.....	10,0	10,9	1,8542	5	10.17. 8	—41.51	100	— 43	— 87	— 31	— 63	+ 32	— 67	0008	A
152.	TT Voiles.....	10,2	(12,2)	2,1084	—	10.16. 9	—45.44	110	— 45	— 99	— 37	— 69	+ 34	— 79	0007	—

Examinons d'abord, au moyen de cette liste, la question de la répartition spatiale. Pour cela on a choisi comme plan de référence celui de la Voie lactée dont le pôle est situé par $\mathfrak{A} = 190°$ et $\mathfrak{D} = +28°$. On trouve :

Distances en siriomètres.	Nombre d'étoiles.		
	ξ.	η.	ζ.
0 — 60	53	56	90
60 — 125	39	40	42
125 — 200	34	31	15
200 — ∞	26	25	5
Σ	152	152	152

60 pour 100 de toutes les variables à éclipse sont situées à moins de 60 sir. et 78 pour 100 à moins de 100 sir., de part et d'autre du plan galactique. Quant à leur distribution dans le plan même, elle est sensiblement uniforme dans toute son étendue, avec une concentration un peu plus dense au centre. Ainsi, la concentration galactique de ces astres, sans être aussi prononcée que celle des

Fig. 13.

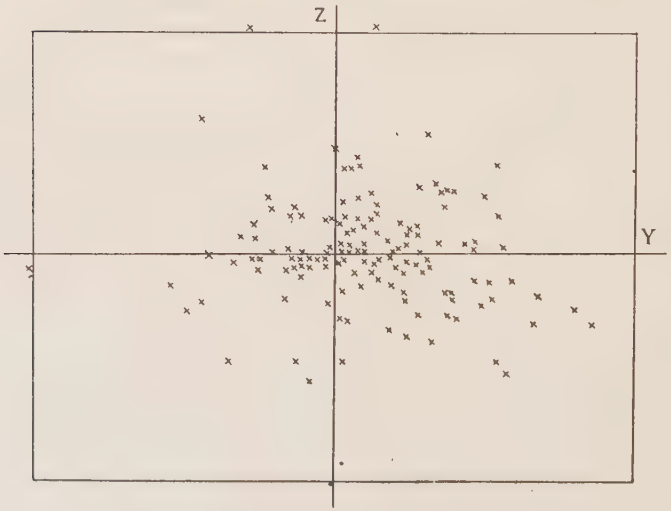


étoiles des types spectraux O, B et N, apparaît néanmoins suffisamment nette.

Les projections de l'ensemble des étoiles du type Algol sur les trois plans de coordonnées galactiques et sur la sphère céleste sont représentées dans les figures 13, 14, 15 et 16 et permettent de se faire une idée plus nette sur leur répartition galactique.

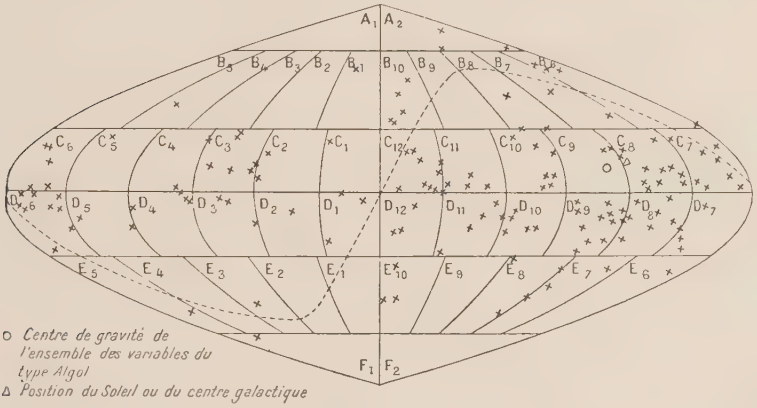
Fig. 14.

Fig. 15.



Rapportée aux trois axes du système de coordonnées équatoriales x, y, z, leur distribution se laisse représenser par des fonctions de fréquence du type A. Le tableau ci-après contient des

Fig. 16.



nombres d'astres et leurs situations rapportées aux trois axes et exprimées en siriomètres.

Tableau

Siriomètres.	x.	y.	z.
$-\infty$	2	3	1
—135	1	0	0
—120	0	1	0
—105	0	1	1
— 90	1	7	2
— 75	4	6	1
— 60	6	15	4
— 45	6	16	7
— 30	10	11	8
— 15	17	18	18
0	39	19	13
+15	20	16	21
+30	11	7	19
+45	12	12	20
+60	8	3	9
+75	7	7	7
+90	2	4	11
+105	2	2	5
+120	3	1	3
+135	0	1	1
$+\infty$	1	2	1

A l'aide de ce tableau on pourra aisément calculer les paramètres et coefficients des fonctions de fréquence correspondantes. On trouve ainsi, pour les dispersions suivant les axes de coordonnées :

$$\sigma_x = +3,17 \text{ sir.}, \qquad \sigma_y = +3,80 \text{ sir.}, \qquad \sigma_z = +3,30 \text{ sir.}$$

donc sensiblement égales; et pour les moments du premier ordre :

$$M_x = +7,03 \text{ sir.}, \qquad M_y = -7,64 \text{ sir.}, \qquad M_z = +22,70 \text{ sir.}$$

Ces derniers nombres permettent en même temps de déduire les coordonnées du centre de gravité de l'ensemble des étoiles considérées, rapporté au système de coordonnées équatoriales avec le Soleil pour origine. En désignant par Δ la distance au Soleil, par α et δ les coordonnées du centre de gravité, on a

$$M_x = \Delta \cos\alpha \cos\delta,$$
$$M_y = \Delta \sin\alpha \cos\delta,$$
$$M_z = \Delta \sin\delta.$$

A l'aide des valeurs précédentes de M_x, M_y, M_z, on conclut

$$\alpha = 20^h,83, \qquad \delta = +67°,2, \qquad \Delta = 2,46 \text{ sir.}$$

Le résultat doit paraître un peu surprenant : en faisant coïncider le centre de gravité du système galactique entier avec celui de l'ensemble des étoiles du type spectral B, Charlier avait déduit (1) pour ses coordonnées

$$\alpha = 7^h,70, \qquad \delta = -55°,62.$$

Par conséquent, pour l'anticentre, $\alpha = 19^h,70$ et $\delta = +55°,62$, nombres qui ressemblent beaucoup à ceux obtenus pour la situation du centre des variables du type Algol. Si ce résultat est exact, le centre de gravité de l'ensemble de ces variables serait situé au voisinage immédiat de notre Soleil, à 2,46 sir. de distance.

Faute de données plus précises et plus complètes, en particulier en ce qui concerne les vitesses radiales, on ne pouvait songer à poursuivre plus loin cette étude statistique sans s'exposer à des conclusions illusoires et n'offrant aucune sécurité réelle.

---

(1) *M. L.*, II, n° 14.

Aussi avons-nous jugé plus utile de rechercher les moyens de vérification de la justesse, ou de l'approximation, que peuvent comporter les résultats et conclusions précédents.

Comparons d'abord les diverses déterminations de la position de l'apex. Celle de L. Boss, basée sur 6188 mouvements propres et considérée actuellement comme la meilleure, fixe l'apex par

$$\text{A} = 270°,5, \qquad \text{D} = +34°,3.$$

Une autre détermination, aussi très bonne, effectuée par W.-W. Campbell et basée sur 1193 vitesses radiales, a donné

$$\text{A} = 268°,5, \qquad \text{D} = +25°,3.$$

Dans le présent travail, on a déduit avec 17 mouvements propres,

$$\text{A} = 288°\,7, \qquad \text{D} = +18°,8.$$

Les écarts sont évidemment forts, mais non anormaux, si l'on tient compte de la proportion des données dans les trois déterminations.

Une deuxième vérification de l'approximation obtenue dans les résultats précédents est fournie par la comparaison des parallaxes déduites d'une part des procédés d'observations (π_0) et d'autre part par le calcul, à l'aide du paramètre R.

Étoiles.	π_o.	π_c.
β Persée	0,048 0,029 0,037	0,029
β Cocher	0,034	0,032
Υ Cygne	0,005	0,004

Plus nombreuses sont les étoiles dont on a calculé les parallaxes probables (π_p) [1], basées sur les grandeurs absolues déduites des meilleures déterminations des éléments de ces variables. En laissant de côté les étoiles plus faibles que $1^m,5$, (entre parenthèses), voici le tableau de comparaison des valeurs du groupe I de la liste

(1) Russell et Shapley, *Ap. J.*, 40, p. 421-425.

de Russel et Shapley :

Nom de l'étoile.	π_p.	π_e.
RZ Cassiopée.....	0",0060	0",0044
ST Carène.....	0020	0011
RZ Centaure.....	0011	0016
SZ Centaure.....	0011	0019
U Céphée.....	0044	0036
β Cocher.....	0300	0317
SW Cygne.....	0014	0012
UW Cygne.....	[0007	0007]
ZZ Cygne.....	[0012	0007]
W Dauphin.....	0011	0010
Z Dragon.....	0016	0007
RX Dragon.....	[0023	0008]
S Écrevisse.....	0024	0020
RG. Chien.....	0182	0069
RX Hercule.....	0036	0033
U Ophiuchus.....	0063	0059
β Persée.....	0262	0294
RS Sagittaire.....	0038	0048
RW Taureau.....	0021	0022
S Voiles.....	0025	0022
U Flèche.....	0,0036	0,0040

Conclusion. — Pour résumer les recherches statistiques faites dans ce travail sur les étoiles variables du type Algol, nous pouvons écrire les conclusions suivantes :

Les variables à éclipse du type Algol forment un système d'étoiles réparties d'une manière presque symétrique de part et d'autre du plan central de la Voie lactée. Ce résultat est d'accord avec les conclusions tirées antérieurement par d'autres astronomes ayant traité cette question par des méthodes différentes.

Le centre de gravité du système semble être situé par $\mathcal{R} = 20^h,8$ et $\mathcal{D} = +67°,2$, au voisinage immédiat de notre Soleil, à 2,46 sir. de distance.

La valeur du paramètre R = 2,51 sir., déduite des mouvements propres est d'accord avec R = 2,74 sir. trouvé par Charlier et Malmquist pour les étoiles des types spectraux $B_0 - B_5$ et $A_0 - A_5$. En outre, la comparaison des parallaxes observées et celles déduites au moyen de R semble montrer que le nombre 2,51 ne doit pas être loin de sa vraie valeur.

En ce qui concerne les divers éléments fournis directement par les observations, on a trouvé que :

1° Les fréquences des grandeurs maxima et minima suivent bien les courbes du type A. Pour les grandeurs minima la courbe est caractérisée par une obliquité assez prononcée 0,19 et un excès positif de 0,08. En outre, les deux séries de grandeurs sont liées par une forte corrélation, $r = 0,91$.

2° Les fréquences des amplitudes et des périodes, au contraire, appartiennent à la famille des courbes B, leur corrélation est insignifiante $r = 0,2$.

3° La loi de Chandler, étudiée à l'aide de la corrélation entre la période et la durée de l'éclipse, ne semble pas pouvoir s'exprimer, d'une manière satisfaisante, par une relation linéaire. Le coefficient de corrélation paraît aller en diminuant au fur et à mesure que le nombre d'astres va en augmentant.

Liste des travaux de statistique stellaire (1).

Adams (W. S.), Joy (A. H.). — The motion in space of some stars of high radial velocity (*Ap. J.*, 49, p. 179).

Adams (W. S.), Stromberg (G.). — The relationship of stellar motions to abs. magnitude (*Ap. J.*, 45, p. 293).

Adams (W. S.), Stromberg, (G.) Joy. (A. H.) — The relationship of abs. magnitude to space velocity (*Ap. J.*, 54, p. 9).

Anding (E.). — Ueber den Einfluss der Sternverteilung auf die Bestimmung des Sonnenapex nach der Bessel'schen Methode (*A. N.*, 140, p. 1).

Bakhuyzen van der Sande (H. G.). — Ueber die Verteilung der Sterne im Raume nach der Grösse der Eigenbewegungen (*A. N.*, 146, p. 209).

Beljawsky (S.). — Apex-und Vertexbestimmung aus den Porter-schen Sternen (*A. N.*, 179, p. 293).

Boss, (L.). — A determination of the Solar motion (*A. J.*, 9., p. 161).

— Tentative researches upon precession and solar motion (*A. J.*, 21, p. 161).

— (*A. J.*, 26. p. 95-99; 109-122)

— (*A. J.*, 26. p. 187-201),

Campbell (W. W.). — *Lick Bulletin*, n° 211.

— A preliminary determination of the motion of the solar system (*Ap. J.* 13, p. 80).

(1) Pour dresser cette liste nous avons eu à notre disposition les bibliothèques des Observatoires de Nice et Marseille.

— *Lick Bulletin*, nº 196.
— *Stellar Motions.*
— On the motions of the brighter class B stars (*A. S. P.*, 23, p. 85).

Carrigan (W. T.). — A method of determining the direction of the Sun's motion in space (*A. J.*, 24, p. 207).

Chandler (S. C.). — On the general relations of variable star phænomena (*A. J.*, 9, p. 1).

Chapmann (S.). — The number and galactic distribution of the stars (*M. N.*, 78, p. 66).

Chapmann (S.), Melotte. — *Memoirs*, R. A. S., 60, Pt. 4.

Charlier (C. V. L.). — Die Abstände der Sterne vom Spektral-Typus B (*A. N.*, 201, p. 9).
— Die galaktische Verteilung der Helium-Sterne (*A. N.*, 202, p. 403).
— An investigation on the motion of the stars (*M. N.*, 73, p. 486).
— The Galaxy of the B stars (*M. N.*, 76, p. 589).

Comstock (G. C.). — The proper motions and Parallaxes of the 10th magn. stars (*A. N.*, 187, p. 113).
— On Kapteyn's luminosity curve (*A. N.*, 185, p. 297).
— Provisional results of an examination of the proper motions of certain faint stars (*A. J.*, 24, p. 43).
— A determination of the Sun's motion relative to the fainter stars (*A. J.*, 25, p. 119).

Curtis (H. D.). — The distances of the stars (*A. S. P.*, 23, p. 143).

Downing (A. M. W.). — The distribution of the stars of the Cape Photographic Durchmusterung (*M. N.*, 62, p. 541).

Dyson (F. W.), Thackeray (W. G.). — A determination of the constant of precession and the direction of the solar motion (*M. N.*, 65, p. 428).
— The systematic motions of the stars shown in the cross proper motions of the Bradley-stars (*M. N.*, 70, p. 416).

Dyson (F. W.). — The proper motions of the stars in Carrington's Circumpolar Catalogue in relation to their spectral type (*M. N.*, 74, p. 733).
— The distribution in space of the stars in Carrington's Circumpolar Catalogue (*M. N.*, 73, p. 334, 402).
— A statistical discussion of the proper motions of the stars in the Greenwich Catalogue for 1910 (*M. N.*, 77, p. 212).

Dyson (F. W.), Thackeray. — The mean parallax of the stars of differend magnitudes (*M. N.*, 77, p. 7).
— The relative density of stars with proper motions between certain limits, with reference to their galactic latitudes (*M. N.*, 77, p. 648).
— *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 28, p. 231.
— *Nature*, 82, p. 13.

Easton (C.). — *Proc. Amsterdam Acad. Sci.*, 8, nº 3.

— Sur la distribution apparente des étoiles dans une partie de la Voie lactée (*A. N.*, 137, p. 81).
— La distribution des nébuleuses et leurs relations avec le système galactique (*A. N.*, 166, p. 129).
— On the distance of the galactic star-clouds (*M. N.*, 81, p. 215).
— On the distribution of the stars and the distance of the Milky Way in Aquila and Cygnus (*Ap. J.*, 1, p. 216).
— A new theory of the Milky Way. (*Ap. J.*, 12, p. 136).

Eddington (A. S.). — Aberration considered in relation to the two star-streams (*M. N.*, 69, p. 571).
— The systematic motions of the stars of Prof. Boss's P. G. C. (*M. N.*, 71, p. 4).
— On the mean distances of the Groombridge stars (*M. N.*, 68, p. 104).
— On the mathematical theory of two star drifts and on the systematic motions of zodiacal stars (*M. N.*, 68, p. 588).
— Note on Mrs Hough and Halm's paper on the systematic motions of the stars (*M. N.*, 70, p. 103).
— The systematic motions of the stars (*M. N.*, 67, p. 34).
— A determination of the frequency law of stellar motions (*M. N.*, 72, p. 368).
— The distribution in space of the bright stars (*M. N.*, 73, p. 346).
— British Association Report, 1911, p. 252; 1909, p. 402.
— The dynamics of a stellar system (*M. N.*, 76, p. 37).
— The distribution of stars in globular clusters (*M. N.*, 76, p. 372).
— The dynamics of a globular cluster system (*M. N.*, 75, p. 366).
— Stellar movements and the structure of the Universe 1914.

Eddington (A. S.), Hartley (W. E.). — A determination of the systematic motions of the stars from the radial velocities (*M. N.*, 75, p. 521).

Elbogen (H.).— Ueber die Eigenbew. der Sterne von verschiedenem Spektral-typus und aus ihnen berechneten Parallaxen (*A. N.*, 215, p. 393).

Espin (T. E.). — The position of the stars of type IV of the variable stars of type III in reference to the Milky Way (*Ap. J.*, 10, p. 169).

Flotow von (A.). — Ueber eine besondere Methode die Sonnenbewegung zu bestimmen (*A. N.*, 213, p. 97).

Forbes (G.). — The real motions of the stars (*M. N.*, 81, p. 357).

Franks (W. S.). — Colours and Magnitudes of the stars (*M. N.*, 69, p. 106).
— The relation between star colours and spectra (*M. N.*, 68, p. 672).
— The relation between star colours and spectra (*M. N.*, 67, p. 539).

Gibson (Miss). — Some considerations regarding the number of the stars (*M. N.*, 66, p. 445).

Gylden (H.). — Ueber die mittleren Parallaxen von Sternen verschiedener Grössenklassen und verschiedener scheinbaren Bewegungen (*A. N.*, 135, p. 289).

Halm (J.). — Further considerations relating to the systematic motions of the stars (*M. N.*, 71, p. 610).

— Statistical investigation of the distribution of the stars and their luminosities (*M. N.*, 80, p. 162).

— On the systematic motions of stars derived from radial velocities (*M. N.*, 80, p. 682.

— On the relation between star counts and apparent magnitudes (*M. N.*, 78, p. 212).

— On the question of the extinction of light in space and the relations between stellar magnitudes, distances and proper motions (*M. N.*, 77, p. 243).

Harzer (P.). — Ueber die Bestimmung des Apex (*A. N.*, 167, p. 225).

Herschel (Sir W.). — *Collected Papers.*

Hertzsprung (E.). — *Zeitsch. für wiss. Phot.*, vol. 3, 5.

— Ueber die räumliche Verteilung der Veränderlichen vom δ-Cephei Typus (*A. N.*, 176, p. 201).

Bemerkungen zur Statistik der Sternparallaxen (*A. N.*, 208, p. 89).

— Bemerkungen zu den Sternzahlungs resultaten von van Rhijn (*A. N.*, 208, p. 365).

— Uber die mutmassliche Zahl schwacher Sterne mit grösserer Eigenbew. (*A. N.*, 204, p. 105).

— Ueber die Verteilung galaktischer Objekte (*A. N.*, 192, p. 261).

— Ueber die räumliche Verteilung der Sterne (*A. N.*, 185, p. 89).

— On the motion of the Magellanic Clouds (*M. N.*, 80, p. 782).

Hinks (A. R.). — On the galactic distribution of gazeous nebulæ and of star-clusters (*M. N.*, 71, p. 693).

Hough (S. S.), Halm (Ph. D.). — On the systematic motions of the Bradley-stars (*M. N.*, 70, p. 569).

— A spectroscopic determination of the systematic motions of the stars (*M. N.*, 70, p. 85).

Hubble (E.). — A general study of diffuse galactic nebulæ (*Ap. J.*, 56, p. 163).

Hugeler (P.). — Ueber die Bewegungen der Sterne II^{er} Grösse (*A. N.*, 216, p. 421).

Jackson (J.), Furner (H. H.). — The hypothetical Parall. of 556 vis. double stars, with a determ. of the Vel. and dir. of the Solar motion (*M. N.*, 81, p. 2).

Jeans (J. H.). — The motions of the stars in a Kapteyn-Universe (*M. N.*, 82, p. 122).

— On the theory of star-streaming and the structure of the universe (*M. N.*, 76, p. 70, 552).

— On the law of distribution in star-clusters (*M. N.*, 76, p. 567).

Julia Bell. — Spectral class and colours of the stars (*M. N.*, 69, p. 108, 420).

Kapteyn (J. C.). — *Groningen Publications*, nos 8, 11, 18.
— Die mittl. Geschw. der Sterne, die Quantität der Sonnenbew. und die mittl. Parall. der Sterne von veschiedener Grösse (*A. N.*, 146, p. 97).
— Bemerkung zu Scheiners Abhandlung in *A. N.*, 147, p. 1 (*A. N.*, 147, p. 305).
— The luminosity curve (*A. N.*, 183, p. 313).
— Ueber die Airy'sche methode zur Beslimm. des Apex der Sonnenbew. (*A. N.*, 159, p. 121).
— Ueber die Declination des Apex der Sonnenbew. (*A. N.*, 161, p. 325).
— Der Apex der Sonnenbew, die Constante der Praec. und die Correctionen der Eigenbew. (*A. N.*, 156, p. 1).
— Definition of the Correlation Coefficient (*M. N.*, 72, p. 518).
— On the average Parall. of the stars of the IV type as compared with that of stars of other types (*Ap. J.*, 32, p. 91).
— On parall. and motion of the brighter Galactic Helium stars (*Ap. J.*, 47, p. 104, 146, 255).
— On the individ. parall. of the brighter Gal. Helium stars (*Ap. J.*, 40, p. 1).
— On the change of spectrum and Colour-Index with dist. and abs. magn. (*Ap. J.*, 40, p. 187).
— Remarks on the determ. of the number and m. parall. of stars (*A. J.*, 24, p. 115).
Kapteyn (J. C.), Frost (E.). — On the velocity of the Sun's motion through space as derived from the rad. vel. of Orion stars (*Ap. J.*, 32, p. 83).
Kapteyn (J. C.), Van Rhijn. — On the distribution of the stars in space especially in high gal. lat. (*Ap. J.*, 52, p. 23).
Kapteyn (J. C.). Weersma (H. A.). — On the derivation of the constants for the two star-streams (*M. N.*, 72, p. 743).
Klumak (R.). — *Thèse.*
— Die Spezialbew. der auf Parallaxe untersuchten Fixsterne (*A. N.*, 200, p. 89).
Kobold (H.). — Der Bau des Fixternsystems.
— Nova Acta der Kais. Leop. Carol. Deutschen Akad. 64.
— Ueber die Darstellung der Richtungen der Eigenbew. der Fixsterne (*A. N.*, 153, p. 273).
— Bemerk. zu dem Art.: Note on a new method of determining Solar Apex (*A. N.*, 152, p. 279).
— Die Konstante der Praec. und die Bew. des Sonnensystems (*A. N.*, 150, p. 257).
— Untersuchung der Eigenbew. von 523 südl. Sterne. (*A. N.*, 144, p. 33).
— Ueber die Verteilung der Motuspeculiares der Sterne (*A. N.*, 144, p. 289).
— Ueber die Verteilung der Sterne mit merklicher Eigenbew. (*A. N.*, 139, p. 65).
— Ueber die Bewegungen im Fixternsysteme (*A. N.*, 125, p. 65).
— Ueber die Bestimmung der eigenen Bew. des Sonnensystems (*A. N.* 135, p. 305).

Lau (H. E.). — Ueber die Bewegung des Sonnensystems (*A. N.*, 188, p. 233)
— Ueber die mittlere Parallaxe der Sterne 10er Grösse (*A. N.*, 185, p. 213).

Lense (J.). — Die Ellipsoidhypothese in den Spezialbew. der Fixsterne (*A. N.*, 210, p. 249).
— Sternbew. in ellipsoidisch geschichteten Sternhaufen (*A. N.*, 204, p. 17).

Ludendorff (H.). — Bemerkungen über die Radialgeschw. der Helium-Sterne (*A. N.*, 202, p. 75).
— Zur Statistik der spectroskopischen Doppelsterne (*A. N.*, 184, p. 373).
— Untersuchungen über die δ-Cephei und ζ-Gemini Sterne (*A. N.*, 203, p. 361)
— Bemerkungen über die Klassifizerung der Helium-Sterne (*A. N.*, 190, p. 193).
— Untersuchungen über veranderliche Sterne I, II (*A. N.*, 214, p. 77, 217).
— Ueber die Beziehung der planetarischen Nebel zu den Helium Sternen (*A. N.*, 212, p. 3).

Lundmark (K.). — Die Stellung der kugelformigen Sternhaufen und Spiralnebeln zu unserem Sonnensysteme (*A. N.*, 209, p. 369).

Luplau-Janssen (C.). — Sterngeschwindigkeiten und Sterntemperaturen (*A. N.*, 197, p. 387).

Luplau-Janssen, Haarh. — Ueber die räumliche Verteilung von neuen Sternen (*A. N.*, 211, p. 89).
— Die Sterne vom IV Secchischen Typus (*A. N.*, 214, p. 383).

Maanen (van A.). — Investigations on proper motions (*Ap. J.*, 54, p. 237).

Muller (G.), Kampf (P.). — Ueber den Zusammenhang der Farben und Grössen der Sterne (*A. N.*, 180, p. 249).

Nashan (P.). — Ueber Beziehungen zwischen Farbe, Spektrum und Parallaxe der Fixsterne (*A. N.*, 197, p. 289).

Newcomb (S.). — *The Stars.*
— Some points relating to the solar motion and the m. parallaxe of stars of diff. orders of magn. (*A. J.*, 20, p. 1).
— On the statistical relations among the parallaxes and the p. m. of the stars (*A. J.*, 22, p. 165).

Oppenheim (S.). — Harmonische Analyse der Radialbew der Sterne, insbesondere der B.-Sterne (*A. N.*, 201, p. 407).
— Ueber die Bahnebere der Sonne (*A. N.*, 202, p. 89).
— Ueber die Eigenbew. der Fixsterne (*A. N.*, 188, p. 137).
— Ueber die Eigenbew. der Fixsterne : Denkschr. der Wiener Ak. 1911, 1915, 1916.
— Ueber die Bahnebene der Sonne und ihr Verhaltniss zur Ebene der Milchstrasse (*A. N.*, 204, p. 417).

Pahlen von der, (E). — Ueber die Verteilung der Sterngeschw. (*A. N.*, 197 p. 337).

Pannekock (A.). — The distance of the Milky Way (*M. N.*, 79, p. 506-.

Pearson (K.). — A last word on the correlation of variable stars (*M. N.*, 70 p. 228).

— On some points with regard to the light fluctuations of the variable stars (*M. N.*, 69, p. 128, 348).

Pearson (K.), Gibbson (W.). — Further considerations on the correlations of stellar characters (*M. N.*, 68, p. 415).

Pearson (K.), Bell Julia. — On the Mass-determination of Parallaxes (*M. N.*, 70, p. 532).

Perrine (C. D.). — Dependance of the Solar Apex upon proper motion (*Ap. J.*, 45, p. 103).

— Some determinations of the Apex and Velocity of solar motion (*Ap. J.*, 44, p. 103).

— Preliminary examination of the planetary nebulæ prefecential motion (*Ap. J.*, 46, p. 175).

— Relation to proper motion of preferential motion (*Ap. J.*, 46, p. 266).

— On the cause of the distance Velocity equation in Stellar motions (*Ap. J* p. 295).

— The nature of the constant-error term found in the determination of the solar motion from rad. vel. (*Ap.J.*, 43, p. 286).

— On some peculiarities of the residual radial velvecities of stars (*Ap. J.* 42, p. 305).

— An apparent dependance of the rad. vel. and p. motions upon magn. and spectral class B. (*Ap. J.*, 41, p. 315).

— An apparent relation between the rad. vel. of the stars and their magn. (*Ap. J.*, 41, p. 395).

Pickering .— *Harv. Ann.*, 48, p. 185.

Plummer (H. C.). — On correlation and the characters of the variable stars (*M. N.*, 69, p. 348).

— On the problem of distribution in globular star-clusters (*M. N.*, 71, p. 460).

— Note on point distribution on a sphere, with some remarks on the determination of the Apex (*M. N.*, 65, p. 565).

— On the motions and distances of certain stars of the types B_8-B_9 (*M. N.*, 72, p. 555).

— On the motions and distances of the bright stars of the types B — B_5 (*M. N.*, 73, p. 174).

— Preliminary discussion of the galactic motions of the brighs stars of type I (*M. N.*, 73, p. 450).

— On the distribution of the stars (*M. N.*, 78, p. 668).

— On the motions and distances of the bright stars of type F (*M. N.*, 76, p. 121).

Pocock (R. J.). — The relation between Mean Parallaxe and magnitude (*M. N.*, 79, p. 45).

Rhijn (van P. J.). — On the number of stars of each phot. magn. in diff. gal. lat. (*M. N.*, 78, p. 132).

— Change of colour with distance and apparent magn. (*Ap. J.*, 43, p. 36).

Rieckert (G.). — Die absoluten Bewegungen von 157 Parallaxensternen (*A. N.*, 217, p. 183).

Rudolph (K.). — Bestimmung von Apex und Vertex aus den Sternen des Bradleyschen Kat. I (*A .N.*, 183, p. 1).

Russell (H. N.), Shapley (H.). — On the distribution in space of eclipsing var. stars (*Ap. J.*, 40, p. 417).

Scheiner (J.). — Ueber die Abhangigkeit der Grössenangaben BD von der Sternfülle (*A. N.*, 147, p. 1).

Schwarzschild (K.). — Ueber die Eigenbew. der Fixsterne (*Gött. Nachr.*, 1907, p. 614; 1908, p. 191).

— Ein Theorem zur Verteilung der Sterngeschw. (*A. N.*, 191, p. 1).

— Zur Stellarstatistik (*A. N.*, 190, p. 361).

— Ueber die Integralgleichungen der Stellarstatistik (*A. N.*, 185, p. 81).

Seares (F. H.). — A determination of the galactic condensation from certain Zones of Astrogr. cat. (*Ap. J.*, 46, p. 117).

— Brightness of the stars their distribution, colours and motions (*A. S. P.*, 30, p. 99).

Seeliger (H.). — *Abh. K. Bayer. Akad. der Wissensch. in Münclen*, vol. 19, 25.

— *Sitzungsb. der K. Bayer. Akad. der Wiss. in Munchen*, 1911, p. 413; 1912, p. 451.

— Bemerkungen über das « schematische » Sternsystem (*A. N.*, 201, p. 3).

— Bemerkungen über die Verteilung der Sterne im Raume (*A. N.*, 137, p. 135).

— Ueber die räuemliche Verteilung der Sterne (*A. N.*, 182, p. 229).

— Ueber die Abhängigkeit der Verteilung der Sterne von versch. Spektraltypen und den mittl. Parall. (*A. N.*, 193, p. 161).

— Ueber die Verteilung der Sterne von versch. Spektraltypen (*A. N.*, 194, p. 137).

— Ueber die Abhängigkeit der Geschw. der Sterne von ihrer Masse (*A. N.*, 194, p. 273).

— Bemerkung über den Zusammenhang der Parallaxen der Sterne mit ihrer Eigenbew. (*A. N.*, 190, p. 290).

Shapley (H.). — The orbits of 87 eclipsing binaries (*Ap. J.*, 38, p. 159).

— Studies based on the Colours and Magnitudes in stellar Clusters (*Ap. J.* p. 114) of the pole (*M. N.*, 74, p. 168).

Stratonoff (W.). — Sur la distribution des étoiles des B. D. (*A. N.*, 153, p. 77).

— Sur la distribution des étoiles du Cape Phot. Durchm. (*A. N.*, 155, p. 209).

Strömberg (G.). — A determination of the solar motion and the stream-motion (*Ap. J.*, 47, p. 7).

— The distribution of the velocities of stars of spectral types F. to M. (*Ap. J.*, 56, p. 265).

Struve (L.). — Ueber die Constante der Praecession und die eigenen Bew. der Sterne (*A. N.*, 156, p. 127.

Stumpe (O.). — Untersuchungen über die Bew. des Sonnensystems (*A. N.*, 125, p. 385).

Turner (H. H.). — On the diagrammatic representation of proper motions (*M. N.*, 70, p. 204).

— A tentative explanation of the « two star-streams » in terms of gravitation (*M. N.*, 72, p. 387).

— Galactic condensation of the stars. (*M. N.*, 78, p. 54).

— Note of the meaning of the so-called third star-stream drift O (*M. N.*, 75, p. 2).

Vogel (A. C.). — Versuch einer Ableitung der Bew. des Sonnensyst. aus den Potsdamer spektrogr. Beob. (*A. N.*, 132, p. 81).

Walkey (O. R.). — The Sun's place within the star-sphere (*M. N.*, 74, p. 649).

Wilkens (A.). — Apexbestimmung aus 620 Sternen mit meist grosserer Eigenbew. (*A. N*, 188, p. 185).

Wilsing (J.). — Ueber die Beziehungen zwischen der Farben, den Temperaturen und den Durchmessern der Sterne (*A. N.*, 214, p. 185).

Wirtz (C.). — Ueber die Bewegungen der Sterne 11e Grösse (*A. N.*, 211, p. 373).

— Die Radialbew. des Gasnebel (*A. N.*, 215, p. 281).

— Einiges zur Statistik der Radialbew, von Spiralnebeln und Kugelsternhaufen (*A. N.*, 215, p. 350).

Zinner (E.). — Untersuchung über die Algolsterne (*A. N.*, 187, p. 177).

Vu et approuvé :
Montpellier, le 21 mars 1924.
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
GODECHOT.

Vu et permis d'imprimer :
Montpellier, le 22 mars 1924.
Le Recteur,
Jules COULET.

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Les séries de Fourier et leurs applications.

Vu et approuvé :

Montpellier, le 21 mars 1924.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

GODECHOT.

Vu et permis d'imprimer :

Montpellier, le 21 mars 1924.

Le Recteur,

Jules COULET.

73389 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS et Cie, 55, quai des Grands-Augustins

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie
73399 Quai des Grands-Augustins, 55.